

T H E S E S

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

pour obtenir

le Grade de Docteur ès Sciences Physiques

par

Jean MATRICON

1ère Thèse : Etude de quelques cas de pénétration du champ magnétique dans un supraconducteur.

2ème Thèse : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 27 Mai 1966 devant la Commission d'Examen

MM. FRIEDEL Président

DE GENNES

COODMAN

NOZIERES

} Examineurs

T H E S E S

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

pour obtenir

le Grade de Docteur ès Sciences Physiques

par

Jean MATRICON

1ère Thèse : Etude de quelques cas de pénétration du champ magnétique dans un supraconducteur.

2ème Thèse : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 27 Mai 1966 devant la Commission d'Examen

MM. FRIEDEL Président

DE GENNES

GOODMAN

NOZIERES

} Examineurs

... je fus possédé de la plus ardente curiosité
relativement au tourbillon lui-même.

Edgar A. POE.

Remerciements

Ce travail a été accompli dans le Laboratoire de Physique des Solides de la Faculté des Sciences d'ORSAY. Le Professeur J. FRIEDEL m'a accueilli dans son service et a dirigé une partie de ce travail. Ses conseils et ses encouragements m'ont été extrêmement précieux. Je lui exprime ma profonde gratitude.

Le Professeur P.G. de GENNES a jour après jour inspiré, guidé, stimulé mon travail avec une vigilance amicale et une patience constante. Qu'il trouve ici l'expression de mon immense reconnaissance.

La fidèle collaboration et l'amitié de C. CAROLI ont été inestimables pour moi autant du point de vue scientifique que pour maintenir la bonne humeur.

J'ai eu avec le Professeur P. NOZIERES et Monsieur B.B. GOODMAN de longues, fréquentes et fructueuses discussions qui m'ont éclairé sur de nombreux points.

Le contact avec les expérimentateurs en supraconductibilité d'ORSAY a été très précieux pour moi et je les remercie tout particulièrement ainsi que l'ensemble de mes camarades du Service de Physique des Solides.

J'ai tiré grand profit du passage à ORSAY de nombreux physiciens, en particulier D. CRIBIER, P. HOHENBERG, B. JACROT, P. PINCUS, Y. ROCHER, D. SAINT JAMES et T. TSUNETO.

Une bonne partie des calculs numériques de ce travail n'auraient pas vu le jour sans l'amabilité et l'efficacité du Groupe de Calcul de l'UNIVAC 1107 d'ORSAY. Je lui adresse collectivement mes plus chaleureux remerciements ainsi qu'à Madame BERNARD qui a bien voulu assurer la frappe du texte et à Monsieur SAINT MARTIN pour la composition des planches.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41533912_0038

Fig. 1. - Effet Meissner.

Pénétration d'un champ faible
à la surface d'un supra-
conducteur

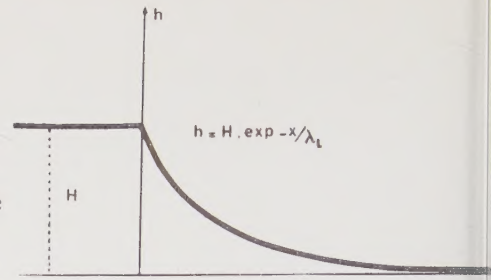


Fig. 3.- Lignes de courant dans
un réseau de tourbillons
près de H_{c2} (d'après Kleiner
et al.)

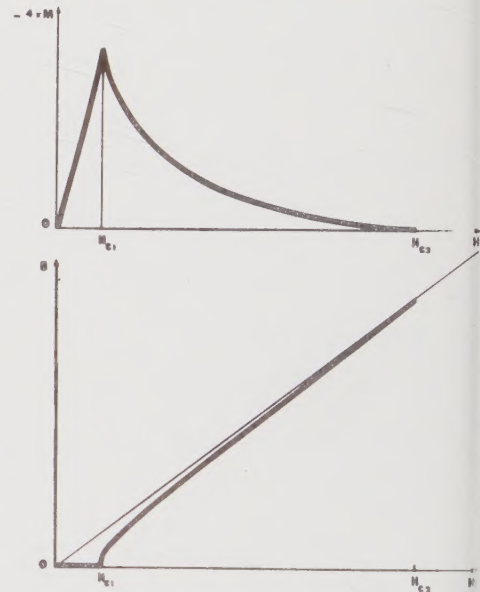
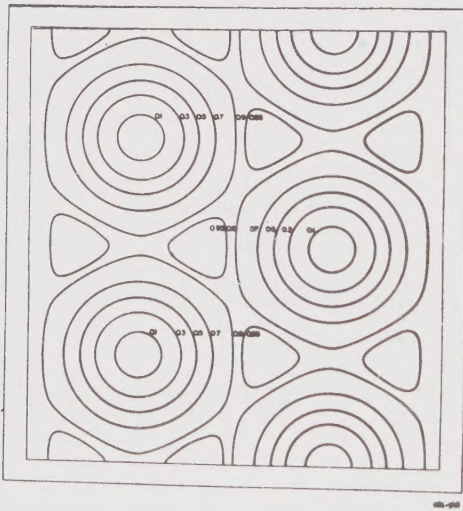
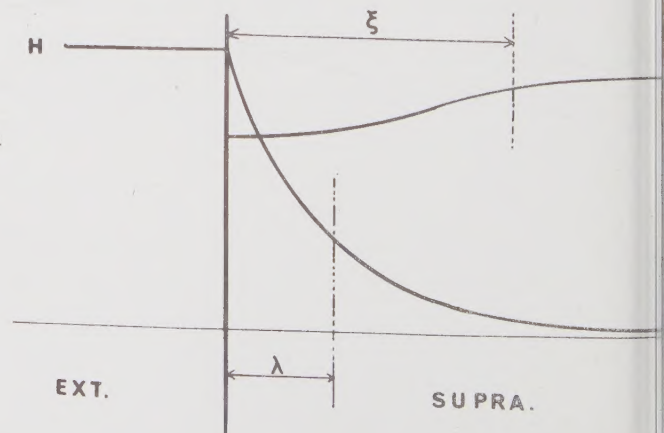


Fig. 2.- Courbes d'aimantation (-
et d'induction (B) dans un
conducteur de type II

Fig. 4. - Pénétration du champ dans un supraconducteur de type I :

ξ : longueur de cohérence,
 λ : épaisseur de pénétration



INTRODUCTION

En 1933, Meissner a montré qu'un supraconducteur, plongé dans un champ magnétique, expulse complètement celui-ci : Meissner attribuait ainsi au supraconducteur un comportement "diamagnétique parfait" et vérifiait la réversibilité de ce comportement : ces points sont très importants, car ils montrent qu'un supraconducteur n'est pas seulement un conducteur dont la résistance est nulle, mais qu'il possède une propriété électromagnétique supplémentaire. C'est Fritz London qui en 1935 a proposé un système d'équations phénoménologiques expliquant l'effet Meissner : d'après London, un supraconducteur expulse le champ magnétique complètement sauf au voisinage de sa surface ; le champ magnétique pénètre à partir de celle-ci de façon exponentiellement décroissante, avec une longueur caractéristique λ_L appelée épaisseur de pénétration (figure 1). Dans cette zone circulent des supercourants qui font écran au champ extérieur. Les expériences de Meissner ont été faites sur un monocristal d'étain pur ; cette condition de pureté est indispensable pour que le phénomène soit net. Dès que l'échantillon n'est plus monocristallin, des phénomènes irréversibles apparaissent qu'on interprète en disant que le flux magnétique est "piégé" par les défauts du réseau cristallin, ce qui empêche l'expulsion totale du champ magnétique.

Cette description est valable lorsque le champ magnétique est inférieur au champ critique H_c ; dès qu'il est supérieur à H_c , la supraconductibilité disparaît et l'induction dans le métal devient égale au champ appliqué. Une conséquence directe de ce diamagnétisme total d'un supraconducteur est l'existence d'un état intermédiaire : considérons une sphère supraconductrice dans un champ magnétique homogène H_0 , dans des conditions d'expulsion totale : on sait qu'il existe alors un phénomène de désaimantation qui fait que le champ à l'équateur de la sphère (la ligne des pôles étant parallèle au champ magnétique) a pour valeur $\frac{3}{2} H_0$. Si H_0 est supérieur à $\frac{2}{3} H_c$, le champ à l'équateur est supérieur au champ critique et l'état supraconducteur doit cesser. L'état magnétique qu'on obtient alors est appelé "état intermédiaire" (Gorter et Casimir ⁽¹⁾). La structure de cet état intermédiaire, faite d'une juxtaposition de domaines macroscopiques normaux et supraconducteurs a été prouvée par les très belles expériences de Meshkowsky et Shalnikov ⁽²⁾.

Le comportement en champ magnétique de certains alliages supraconducteurs a été étudié en premier par Shubnikov ⁽³⁾ et apparaît tout à fait différent de celui des métaux purs comme l'étain, l'aluminium ou le plomb. Un cylindre de plomb pur, dont l'axe est parallèle au champ magnétique, et dont le rayon est petit par rapport à la longueur (de sorte qu'il n'y ait pas d'effets démagnétisants) à 4.24° K redevient normal lorsque le champ appliqué atteint la valeur $H_c = 540$ oersteds. Par contre, un échantillon de même forme d'un alliage de plomb avec 8 % d'indium ne se comporte comme un diamagnétique parfait que jusqu'à un champ extérieur de 310 oersteds. A partir de cette valeur, l'induction B dans l'alliage prend une valeur finie et croît progressivement avec H . Enfin lorsque le champ appliqué H atteint la valeur 2.400 oersteds, l'échantillon cesse d'être supraconducteur (Shubnikov) (figure 2). Ce mode de pénétration du champ est profondément différent de celui que nous avons décrit pour l'état intermédiaire.

Conclusions :

a) Un supraconducteur plongé dans un champ magnétique faible exclut les lignes de forces. Le champ ne pénètre que sur une épaisseur de pénétration λ_L .

b) En champ plus élevé, deux cas sont possibles :

1°) Matériaux de "première espèce" (Al, Sn ... purs). Si la forme géométrique s'y prête, la transition en champ est du 1er ordre. On peut avoir la présence simultanée de domaines supraconducteurs et normaux (état intermédiaire).

2°) Matériaux de "seconde espèce" (notamment certains alliages supraconducteurs). Ils présentent un effet Meissner complet jusqu'à un champ H_{c1} puis il apparaît une phase dite de Shubnikov, dans laquelle l'induction n'est plus nulle. Lorsque le champ appliqué atteint une certaine valeur H_{c2} , l'alliage redevient normal. Ce phénomène est réversible et les valeurs de H_{c1} et H_{c2} sont caractéristiques de la composition de l'alliage à une température donnée.

La théorie phénoménologique de Landau et Ginsburg ⁽⁴⁾ a permis de comprendre d'une part le comportement des métaux purs en champ élevé, d'autre part la nature de la phase de Shubnikov (Abrikosov ⁽⁵⁾). (Nous donnerons en appendice un résumé des théories de London et de Landau-Ginsburg). Nous rappellerons seulement ici que cette dernière théorie valable au voisinage de la température de transition relie par un système de deux équations différentielles couplées, les variations dans l'espace du potentiel vecteur et d'un "paramètre

d'ordre" f dont le module vaut 1 dans un supraconducteur homogène et zéro dans le métal normal. Les variations du potentiel vecteur et du champ magnétique se font avec une échelle de longueur λ_T , l'épaisseur de pénétration, celles du paramètre d'ordre avec une échelle de longueur ξ_T , la longueur de cohérence. Ces deux longueurs varient avec la température (elles divergent à T_c comme $(T_c - T)^{-1/2}$) mais leur rapport $\kappa = \lambda/\xi_T$ est indépendant de la température : c'est une grandeur caractéristique du métal.

1°) Structure de la phase tourbillonnaire. Abrikosov ⁽⁵⁾ a montré qu'on pouvait décrire la phase de Shubnikov dans l'approximation de Landau et Ginsburg : le paramètre d'ordre varie de point en point et son module $|f|$ présente une structure périodique à deux dimensions dont la maille unité contient une "ligne de tourbillon" de courants supraconducteurs (figure 3). Chaque ligne isolément est un système à symétrie cylindrique de courants superfluides circulant autour d'un axe rectiligne ; la circulation totale de ces courants est quantifiée et le flux magnétique qu'ils créent vaut 1 quantum de flux $\phi_0 = c h/2e \approx 2.10^{-7}$ Maxwell. Abrikosov ⁽⁵⁾ puis Harden et Apt ⁽⁶⁾ ont donné la solution des équations de Landau et Ginsburg pour cette ligne isolée dans quelques cas.

Dans le premier chapitre, nous reprenons ce calcul et nous l'étendons à toutes les valeurs du paramètre κ supérieures à $1/\sqrt{2}$. Nous envisageons aussi la situation où la ligne de tourbillon porterait un nombre de quanta de flux supérieur à 1 : nous montrons que ces configurations sont moins favorables que la configuration à 1 quantum, quel que soit κ .

Abrikosov n'a considéré que le cas où la ligne de tourbillon est rectiligne et parallèle au champ appliqué. L'irréversibilité qu'on observe la plupart du temps dans les courbes d'aimantation des supraconducteurs de seconde espèce s'interprète en supposant que des obstacles s'opposent au libre déplacement des lignes à l'intérieur du métal. Les lignes ne sont plus alors ni rectilignes, ni parallèles. Nous proposons dans le second chapitre une description, valable pour les valeurs élevées de κ , de ces lignes déformées par l'interaction avec un champ magnétique, celui-ci provenant soit d'une source interne (inclusion ferromagnétique ou ligne voisine) soit d'une source externe (champ extérieur). Cette description présente de grandes analogies avec celle d'un ensemble de

dislocations dans un milieu élastique et, en nous aidant de cette ressemblance, nous établissons quelques résultats généraux pouvant servir de base à une étude des situations hors d'équilibre qu'on rencontre dans les supraconducteurs "durs".

Lorsqu'on considère non plus une ligne isolée mais un ensemble de lignes, il est nécessaire pour calculer l'équilibre thermodynamique du supraconducteur, de tenir compte des interactions entre lignes. Ces interactions sont de nature électromagnétique et leur portée est d'ordre λ . Lorsque la distance entre lignes devient inférieure à λ , les forces répulsives entre lignes et la pression magnétique due au champ extérieur ne s'équilibrent que si les lignes s'ordonnent en un réseau régulier (à condition qu'aucune force d'ancrage ne les empêche de se déplacer). Dans le troisième chapitre, nous étudions les deux réseaux de plus haute symétrie, le réseau à maille carrée et réseau à maille triangulaire. En comparant leurs énergies libres et leurs coefficients élastiques, nous montrons que, dans le domaine où les interactions sont purement électromagnétiques (κ élevé et distance entre lignes très supérieure à ξ_T) le réseau triangulaire est le plus stable.

2) Épaisseurs de pénétration. A côté de la pénétration en volume de la phase de Shubnikov, il existe une pénétration superficielle dite pénétration de London. La théorie de London donne pour l'épaisseur de pénétration λ une valeur indépendante de l'intensité du champ appliqué. La théorie plus fine de Landau et Ginsburg prédit en réalité une faible augmentation de cette longueur lorsque le champ varie de 0 à H_c . (Ce résultat est obtenu lorsque la limite du supraconducteur est une surface plane* séparant celui-ci soit du vide, soit d'un isolant). Physiquement, λ augmente parce que f diminue en présence du champ, sur une épaisseur ξ_T près de la surface (fig. 4). Mais l'effet est faible dans les matériaux de première espèce parce que la perturbation magnétique est confinée à une épaisseur $\lambda \ll \xi_T$ ($\kappa \ll 1$).

Nous discutons dans le chapitre IV une situation où l'effet du

* Toute surface courbe dont le rayon de courbure est beaucoup plus grand que λ peut être assimilée à une surface plane.

champ magnétique sur λ est plus spectaculaire : c'est celle où le supraconducteur est recouvert par un métal normal N avec un bon contact électrique entre S et N. Dans ces conditions, même en champ nul, f a une valeur à la surface beaucoup plus faible que 1. La perturbation ainsi produite s'étend sur une longueur d'ordre ξ_T . On peut envisager deux cas :

1) $\kappa \gg 1$ c'est-à-dire $\lambda \gg \xi$: la petite perturbation du paramètre d'ordre n'a pas d'influence à l'échelle des phénomènes électromagnétiques et il n'y a pas de modification sensible de λ .

2) $\kappa < 1$: le champ magnétique "voit" un état supraconducteur perturbé sur une longueur beaucoup plus grande que λ ; le paramètre d'ordre étant abaissé, on s'attend à ce que le champ magnétique pénètre plus facilement et donc qu'on observe une augmentation de l'épaisseur de pénétration.

Nous calculons cet effet dans le domaine de validité des équations de Landau et Ginsburg, ce qui entraîne d'importantes réserves dans la comparaison que nous pouvons faire avec les résultats expérimentaux.

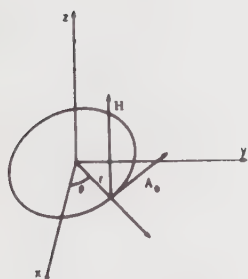
I. - Solutions des équations de Landau-Ginsburg à deux dimensions.

Problème d'Abrikosov - Ligne de tourbillon isolée.

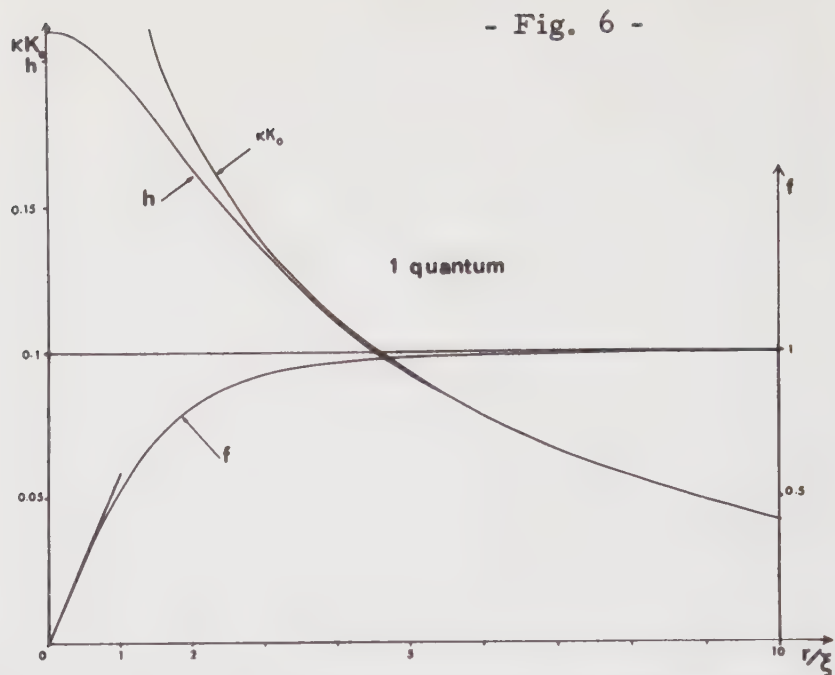
Pour décrire la phase de Shubnikov, caractérisée par une pénétration réversible du champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur, Abrikosov ⁽⁵⁾ a proposé d'étendre aux supercourants les idées que Feynman et Onsager ⁽⁷⁾ avaient proposées pour expliquer le comportement de l'hélium superfluide dans un récipient en rotation : lorsque la vitesse de la paroi du récipient dépasse une certaine valeur critique, le superfluide réagit à l'entraînement non pas en se mettant à tourner globalement, mais en créant des lignes de tourbillon parallèles à l'axe de rotation, qui se forment au voisinage de la paroi et emportent chacune un quantum h/M de circulation. Abrikosov a adapté cette description aux supercourants. L'analogue de la vitesse de rotation du récipient est ici le champ magnétique appliqué : au dessus du champ critique H_{c1} , il apparaît au voisinage de la paroi des lignes de tourbillon parallèles au champ appliqué. La circulation des supercourants est quantifiée comme l'est celle de l'hélium superfluide : le flux magnétique ϕ porté par chaque ligne est un multiple entier du quantum de flux $\phi_0 = h c/2e$. Expérimentalement, $\phi = \phi_0$ et l'état de subdivision maximum est réalisé ; chaque ligne de tourbillon emporte donc en quittant la paroi où elle a été créée vers l'intérieur de l'échantillon un flux magnétique ϕ_0 . Pour faire une description de cette ligne de tourbillon, Abrikosov a utilisé les équations de Landau et Ginsburg. Avant de reprendre ce calcul, nous allons donner une description simplifiée de la ligne en nous plaçant dans l'approximation de London. Nous savons (appendice I) que cette équation est bonne lorsque la longueur de cohérence est très petite devant l'épaisseur de pénétration ($\kappa \gg 1$). Cette situation est sensiblement réalisée dans les supraconducteurs du type Hb_3Sn où l'on sait que K a une valeur supérieure à 30. Cette description n'a évidemment qu'une valeur qualitative dans les supraconducteurs où κ est inférieur à 10 (ce qui était le cas pour les alliages de Shubnikov)

Considérons donc un supraconducteur dans lequel l'équation empirique de London s'applique :

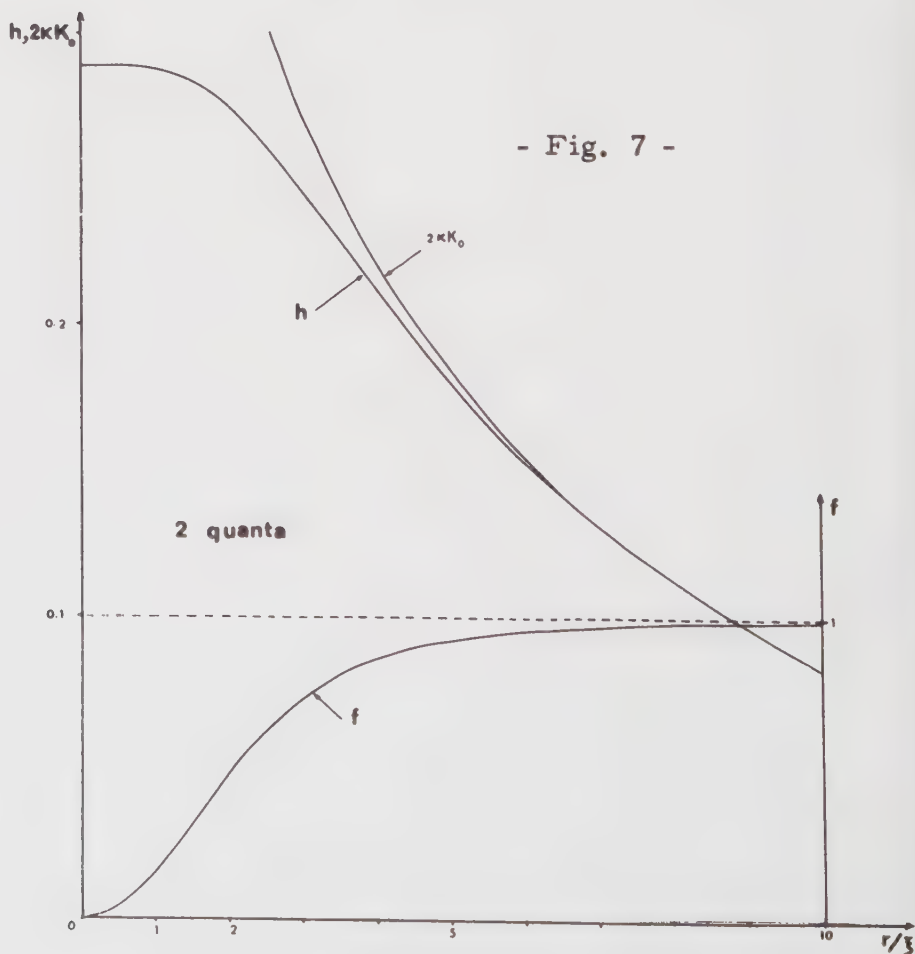
$$\text{rot } \vec{j} + k \vec{h} = 0 \quad (I,1)$$



- Fig. 5 -



Variations du paramètre d'ordre f , du champ magnétique et de la fonction de Hankel K_0 autour du centre d'un tourbillon calculées pour $\kappa = 10$



Cette relation locale établit la proportionnalité entre la densité de courant superfluide $j(r)$ en un point r et le champ magnétique $h(r)$ en ce point. En général, la théorie de London ne permet pas de calculer la valeur de la constante k . Compte tenu de l'équation de Maxwell $\text{rot } h = 4\pi/c j$, on peut écrire

$$h + \lambda_T^2 \text{rot rot } h = 0 \quad (\text{I, 2})$$

On a une relation analogue pour les densités de courant

$$j + \lambda_T^2 \text{rot rot } j = 0 \quad (\text{I, 2 bis})$$

Dans ces deux équations, $\lambda_T = (c/4\pi k)^{1/2}$ est une grandeur qui a la dimension d'une longueur qu'on appelle épaisseur de pénétration (cf. appendice I). Nous recherchons des solutions de ces équations ayant une symétrie cylindrique, le champ magnétique étant dirigé selon Oz, et nous nous plaçons dans la jauge de London ($\text{div } A = 0$) où la densité de courant est proportionnelle au potentiel vecteur. Celui-ci est alors solution d'une équation identique aux équations (I, 2). La seule composante non nulle de A est la composante tangentielle A_θ , et l'équation (I, 2 bis) s'écrit en coordonnées cylindriques (fig. 5)

$$\lambda_L^2 \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r A_\theta) \right] = A_\theta \quad (\text{I, 3})$$

Les solutions de cette équation sont des combinaisons linéaires des fonctions de Hankel d'argument imaginaire $K_1(r/\lambda)$ et $Y_1(r/\lambda)$. Etant donné que le champ h , qui vaut en module $1/r d/dr(r A_\theta)$, doit rester fini pour les grandes valeurs de r/λ , nous ne gardons que la solution $A_\theta = c K_1(r/\lambda)$. Pour déterminer c nous imposons au flux total d'être un multiple entier du quantum de flux ϕ_0 .

$$\phi = \iint \text{rot } A \, d\sigma = 2\pi \int_0^\infty \frac{c}{\lambda} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) r \, dr = 2\pi c \lambda = v \phi_0$$

où v est un nombre entier. Ceci détermine la constante $c = \frac{v \phi_0}{2\pi \lambda}$ et nous obtenons pour le champ magnétique

$$H(r) = \frac{\nu \phi_0}{2 \pi \lambda^2} K_0 \left(\frac{r}{\lambda} \right) \quad (\text{II}, 4)$$

La solution que nous avons ainsi construite n'est pas tout à fait physique à cause de la divergence logarithmique du champ à $r = 0$. En réalité, la supraconductibilité dans la région $r < \xi_T$ est certainement modifiée et l'équation de London ne s'applique plus. La singularité étant située à l'origine, nous supposerons que dans un petit cylindre de rayon ξ_T la densité d'électrons supraconducteurs est fortement atténuée. Le champ magnétique doit peu varier dans ce cylindre autour de la valeur qu'il a à sa surface, c'est-à-dire

$$H_{\text{int}} = \frac{\nu \phi_0}{2 \pi \lambda^2} K_0 \left(\frac{\xi_T}{\lambda_T} \right) = \frac{\nu \phi_0}{2 \pi \lambda^2} \text{Log} \left(\frac{\lambda_T}{\xi_T} \right) \left(\frac{\lambda_T}{\xi_T} \gg 1 \right)$$

On voit tout de suite ce qu'il y a d'arbitraire dans le choix de cette coupure à ξ_T . (Néanmoins cette dernière n'intervient que par un logarithme dans la valeur de H_{int}). Il faut également remarquer qu'en procédant ainsi, on diminue la valeur du flux porté par la ligne puisqu'on remplace le champ logarithmiquement divergent dont la normalisation avait été imposée par la quantification du flux par un champ constant. L'erreur commise étant d'ordre ϕ_0/K^2 , nous pouvons ne pas en tenir compte.

On peut également obtenir à partir de ce modèle simplifié une estimation de l'énergie électromagnétique par unité de longueur de la ligne, c'est-à-dire de son "énergie de ligne". Nous verrons que ce concept d'énergie de ligne peut être étendu au cas où la ligne n'est pas rectiligne. Dans toute la région extérieure au coeur, où l'équation de London s'applique, l'énergie est la somme de deux termes : un terme dû à l'énergie cinétique des électrons $dE_{\text{cin}} = (2\pi \lambda^2/c^2) \dot{\psi}^2 d\tau = 1/8\pi(\lambda_T \text{roth}_{\tilde{\psi}})^2 d\tau$ et un terme d'énergie magnétique $dE_{\text{mag}} = \tilde{\psi}^2/8\pi d\tau$.

L'énergie totale par unité de longueur de la ligne s'écrit donc :

$$W_{\text{ligne}} = \frac{1}{8\pi} \int_{\text{ext. au coeur}} \left[\tilde{\psi}^2 + (\lambda_T \text{roth}_{\tilde{\psi}})^2 \right] d\tau = 2\pi \int_{\xi}^{\infty} r dr \frac{\tilde{\psi}^2 + (\lambda_T \text{roth}_{\tilde{\psi}})^2}{8\pi} \quad (\text{I}, 5)$$

Dans notre modèle simplifié, nous savons calculer cette intégrale

$$= \left(\frac{\nu \phi_0}{4\pi \lambda} \right)^2 \text{Log} \frac{\lambda_T}{\xi_T} \quad (I, 6)$$

Nous devons faire trois remarques sur cette formule.

- 1) La coupure à ξ_T a le même caractère arbitraire ici que dans la formule donnant H_{int} .
- 2) Nous négligeons la contribution du coeur à l'énergie de la ligne. En effet, nous verrons que le "paramètre d'ordre" est très petit dans le coeur, et qu'on peut grossièrement le considérer comme nul. Ceci revient à décrire le coeur comme un cylindre de métal normal de rayon ξ_T . L'énergie nécessaire pour le créer est d'ordre $H_c^2 / 8\pi \times \pi \xi_T^2 = (\phi_0 / 8\pi \lambda)^2$. Dans la limite de κ très élevé, ce terme est négligeable devant (I, 6) : l'énergie de ligne est essentiellement d'origine électromagnétique.
- 3) Le nombre de quanta de flux par ligne intervient au carré : dans ce modèle, l'énergie d'une ligne à ν quanta est ν fois supérieure à celle d'un système de ν lignes à 1 quantum suffisamment éloignées les unes des autres pour qu'on puisse négliger leurs interactions.

Dans ces conditions, la situation avec un quantum de flux par ligne est la plus stable. Nous verrons plus loin que cette propriété subsiste même lorsqu'on tient compte de l'interaction entre lignes.

Le modèle que nous venons de décrire a pour limite de validité celle de l'équation de London, c'est-à-dire la limite où λ_T est beaucoup plus grand que ξ_T , quelle que soit la température et où le champ magnétique est petit par rapport au champ critique.

Il est commode de décrire la ligne de tourbillon dans cette approximation à l'aide d'une équation valable dans tout l'espace, y compris au niveau de la ligne elle-même et qui s'écrit

$$\vec{h} + \lambda^2 \text{rot rot } \vec{h} = \phi_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (\text{I}, 7)$$

Cette équation a été proposée par Abrikosov ⁽⁵⁾ pour la géométrie de la ligne rectiligne. Lorsque ce n'est pas le cas, on peut encore l'utiliser (Goodman ⁽⁸⁾) à condition de considérer ϕ_0 comme un vecteur tangent à la ligne au point $\vec{r}_0$. Lorsque λ_T cesse d'être très grand par rapport à ξ_T , la région de coeur dur cesse d'être négligeable ; la description reste valable pour l'extérieur de la ligne, mais les valeurs du champ au centre et de l'énergie de ligne ne peuvent plus être calculées sans faire intervenir la distorsion du paramètre d'ordre dans la région centrale. Le calcul de cette situation a été fait par Abrikosov ⁽⁵⁾ à partir des équations de Landau-Ginsburg.

Il n'existe pas de solution explicite générale de ces équations dans la géométrie cylindrique et pour les conditions aux limites de la ligne isolée. La solution détaillée que propose Abrikosov n'est valable qu'aux valeurs très élevées de K et encore ce n'est que le raccordement de trois solutions approchées. C'est pourquoi nous avons fait une étude numérique systématique de ces solutions, pour toutes les valeurs de κ comprises entre $1/\sqrt{2}$ et l'infini, et pour un nombre de quanta de flux égal à 1 et à 2.

Nous avons utilisé le système d'unités adapté aux équations de Landau-Ginsburg (voir appendice I). Le seul coefficient qui intervienne est alors κ et ces équations s'écrivent :

$$\left(\frac{i}{\kappa} \nabla + \vec{A} \right)^2 \psi = \psi - \psi |\psi|^2 \quad (\text{I}, 8a)$$

$$-\text{rot rot } \vec{A} = |\psi|^2 \vec{A} + \frac{i}{2\kappa} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (\text{I}, 8b)$$

Il est commode de choisir la jauge dans laquelle le paramètre d'ordre est réel. Si l'on pose $\psi = f e^{i\phi}$ (f réel), le potentiel vecteur correspondant à cette jauge s'écrit $\vec{A}_1 = \vec{A} - \nabla \phi / K$ et les équations (I, 8) se réduisent à

$$\left(\frac{i}{\kappa} \nabla + \vec{A}_1 \right)^2 f = f - f^3 \quad (\text{I}, 9a)$$

$$-\text{rot rot } \vec{A}_1 = f^2 \vec{A}_1 \quad (\text{I}, 9b)$$

Plaçons nous de nouveau en géométrie cylindrique, ce qui suppose que f et $|A_1|$ ne dépendent que de la coordonnée r . Le champ étant selon Oz , la seconde équation nous montre que A_1 n'a de composante que tangentielle dans le plan xOy (fig. 5).

Les équations s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \text{a) } -\frac{1}{\kappa^2 r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + A_1^2 f &= f - f^3 & \text{(I, 10 a)} \\ \text{b) } \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r A_1) \right] &= A_1 f^2 & \text{(I, 10 b)} \end{aligned}$$

en appelant maintenant
 A_1 la longueur du
vecteur $\vec{A}_1$

La solution que nous cherchons représente une perturbation locale de la supraconductibilité et par conséquent tend à l'infini vers celle du supraconducteur homogène sans champ magnétique. Ceci nous impose comme condition aux limites $H \rightarrow 0$, $A \rightarrow 0$, $f \rightarrow 1$ quand $r \rightarrow \infty$. Nous allons examiner plus en détail ce qui se passe autour de l'origine. La quantification du flux magnétique provient de la condition d'uniformité imposée au paramètre d'ordre. Cela veut dire que lorsqu'on parcourt un circuit fermé entourant la singularité, il doit reprendre la même valeur chaque fois qu'on repasse au même point du circuit. Ceci impose $\phi = n \theta$ où ϕ est la phase du paramètre d'ordre, θ l'angle polaire, et n un entier, positif à cause du choix de jauge. A priori, cet entier peut être quelconque mais non nul car il doit y avoir un courant*. Ce choix de la phase nous donne le comportement de A , au voisinage de $r = 0$: le terme prédominant est

$$\frac{\nabla \phi}{\kappa} = \frac{1}{\kappa r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{n}{\kappa r}$$

* Il faut remarquer que cette condition imposée à la phase du paramètre d'ordre modifie radicalement la structure du supraconducteur, même au delà de la distance où f varie et où le champ magnétique est différent de zéro : en effet, si dans une expérience de microscopie électronique par exemple, nous suivons deux électrons initialement en phase, si leurs trajectoires passent de part et d'autre de la ligne, même très loin, ils sont ensuite déphasés de $n \pi$ et ce déphasage pourrait être observable (Castaing (9) si n est impair.

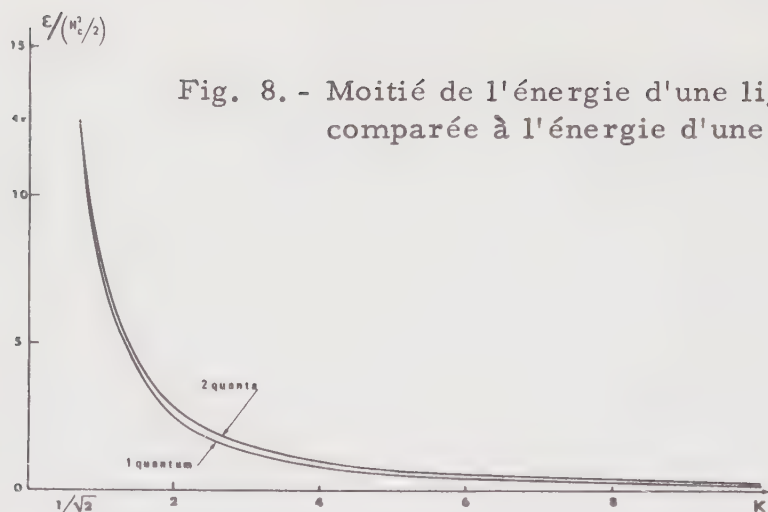


Fig. 8. - Moitié de l'énergie d'une ligne à deux quanta comparée à l'énergie d'une ligne à un quantum

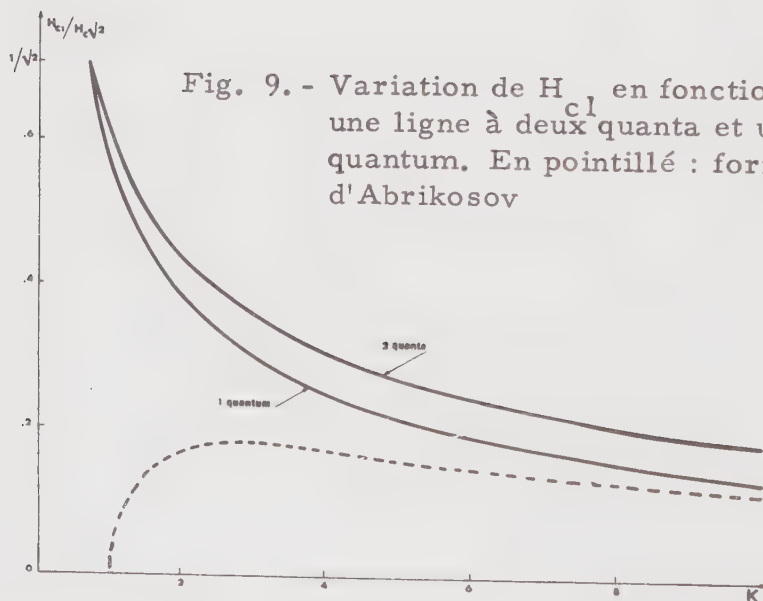


Fig. 9. - Variation de H_{c1} en fonction de κ pour une ligne à deux quanta et une ligne à un quantum. En pointillé : forme asymptotique d'Abrikosov

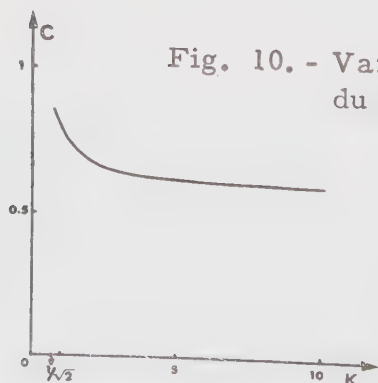


Fig. 10. - Variation de la pente à l'origine du paramètre d'ordre en fonction de κ

Si nous reportons cette valeur dans l'équation a), nous voyons que nécessairement f doit se comporter comme $c r^n$ pour $r \rightarrow 0$, où c est une constante qui ne peut être déterminée seulement par les conditions à l'origine : il est nécessaire de connaître la solution complète satisfaisant aussi aux conditions à l'infini. La même remarque s'applique également au champ à l'origine $H(0)$, qui figure dans le second terme du développement de $A_1(r) = n/\kappa r - 2 H(0)r + \dots$

Nous avons calculé numériquement les solutions couplées A_1 et f en imposant comme conditions initiales pour A_1 de varier comme $n/\kappa r$ et pour f de varier comme $c r^n$, en ajustant la valeur de c pour que les conditions à l'infini soient satisfaites ($f \rightarrow 1$, $A_1 \rightarrow 0$). Nous donnons sur la figure (6) le résultat du calcul numérique pour la valeur $\kappa = 10$. Nous avons représenté les variations du paramètre d'ordre, du champ magnétique, et de la fonction $K_0(r)$, qui représente la forme asymptotique du champ magnétique.

Nous représentons sur la figure (7) les variations des mêmes grandeurs, mais pour un vortex à deux quanta de flux. On remarque la variation parabolique du paramètre d'ordre au voisinage du centre qui élargit fortement le "coeur" de la ligne.

Nous avons également calculé exactement l'énergie de la ligne par unité de longueur, mais en tenant compte non seulement de l'énergie électromagnétique comme dans l'équation (II, 5), mais aussi de l'énergie de condensation liée à la variation du paramètre d'ordre. Lorsque h et f sont solutions des équations de Landau-Ginsburg, la différence d'énergie entre cette solution et la solution du supraconducteur homogène en champ nul s'écrit (Landau et Ginsburg (4))

$$\varepsilon = 2 \pi \int_0^{\infty} \left(h^2 + \frac{1 - f^4}{2} \right) r \, dr$$

Nous reportons sur la figure (8) la variation de cette énergie en fonction de κ pour un et deux quanta par ligne. Ce résultat étend jusqu'à $\kappa = 1/\sqrt{2}$ le fait établi pour les valeurs élevées de κ : l'énergie d'une ligne à deux quanta est plus élevée que deux fois l'énergie d'une ligne à un quantum (nous verrons que cette différence s'annule pour $\kappa = 1/\sqrt{2}$). Nous donnons également sur la figure (9) la variation de H_{c1} en fonction de κ pour un et deux quanta par ligne. Les valeurs obtenues pour un quantum sont en accord avec

celles de Harden et Apt ⁽⁶⁾. Le problème se simplifie dans les deux cas extrêmes $\kappa = 1/\sqrt{2}$ et $\kappa \infty$.

a) $\kappa = 1/\sqrt{2}$. Pour cette valeur remarquable du paramètre κ , Harden et Apt ⁽⁶⁾ ont montré qu'il existe des relations très simples entre A_1 et f permettant de réduire le système à une seule équation. Ces relations sont :

$$\begin{cases} H = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - f^2) \\ A_1 = \frac{\sqrt{2}}{f} \frac{df}{dr} \end{cases} \quad (\text{I, 12})$$

On vérifie immédiatement par substitution que ces relations sont des intégrales premières du système différentiel. On peut éliminer A_1 et obtenir pour f l'équation

$$- \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \frac{2}{f} \left(\frac{df}{dr} \right)^2 = f - f^3 \quad (\text{I, 13})$$

Il est plus commode, lorsqu'il s'agit seulement du paramètre f , de prendre pour unité de longueur la longueur de cohérence $\xi(T)$ et non plus $\lambda(T)$. Compte tenu du fait que $\kappa = \lambda(T)/\xi(T) = 1/\sqrt{2}$, l'équation s'écrit

$$\boxed{- \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{df}{d\rho} \right) + \frac{1}{f} \left(\frac{df}{d\rho} \right)^2 = f - f^3} \quad (\text{I, 14})$$

Nous avons calculé numériquement la solution de cette équation satisfaisant aux conditions aux limites requises. La valeur de la pente initiale est $c = 0.85318$

Il est intéressant de calculer l'énergie d'une telle solution. La relation donnant cette énergie s'écrit d'après Abrikosov

$$E = 2\pi \int_0^\infty \left(H^2 + \frac{1 - f^4}{2} \right) r \, dr = 2\pi \int_0^\infty (1 - f^2) r \, dr \quad (\text{I, 15})$$

En tirant $1 - f^2$ de l'équation (I, 13), on a

$$E = - 4\pi \int_0^\infty \frac{1}{f} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) dr + 4\pi \int_0^\infty \frac{r}{f^2} \left(\frac{df}{dr} \right)^2 dr = - 4\pi \left[\frac{r}{f} \frac{df}{dr} \right]_0^\infty = 4\pi n$$

Cette expression linéaire par rapport au nombre de quanta par ligne, montre qu'on peut former indifféremment n lignes à 1 quantum ou 1 ligne à n quanta. Cette propriété remarquable est liée au fait, rigoureusement démontré par Saint James et Sarma⁽¹⁰⁾ que pour $\kappa = 1/\sqrt{2}$, l'énergie de paroi est nulle.

b) $\kappa \rightarrow \infty$. Dans ce cas idéal, la variation du paramètre d'ordre se produit entièrement dans un domaine où le champ ne varie pas (il est même nul). La seule contribution au potentiel vecteur est le terme en $1/\kappa r$. On peut donc éliminer A_1 , et il reste l'équation (en unités de $\xi(T)$)

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{df}{d\rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} f = f^3 - f} \quad (\text{I, 16})$$

Nous avons également calculé numériquement la solution de cette équation. La valeur de la pente à l'origine est $c = 0.58319$

Cette valeur est en accord avec la valeur estimée sur la courbe que donne Pitaecki⁽¹¹⁾ comme solution du problème formellement analogue d'un vortex dans l'hélium. La figure (10) montre la variation de la pente initiale c du paramètre d'ordre en fonction de K . On voit que cette variation est très faible, ce qui montre que le rayon du coeur varie très peu dans tout le domaine des supraconducteurs de seconde espèce : on peut pratiquement toujours considérer $\xi(T)$ comme la mesure du rayon de ce coeur.

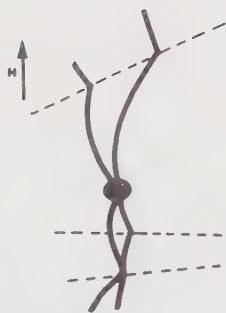


Fig. 11. - Lignes ancrées sur des défauts

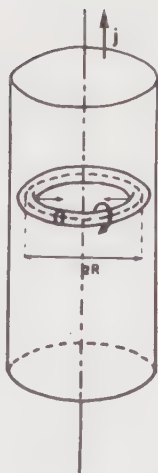


Fig. 12. - Anneaux de tourbillon dans un fil cylindrique

- Fig. 14 -

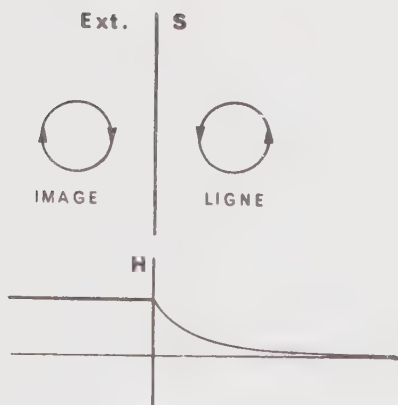
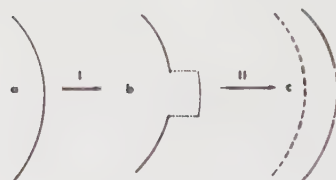


Fig. 15. - Demi-anneau (L) en interaction avec son image (Im) au voisinage de la surface

Fig. 16. - Energie libre du demi-anneau en fonction de son rayon pour différentes valeurs de h

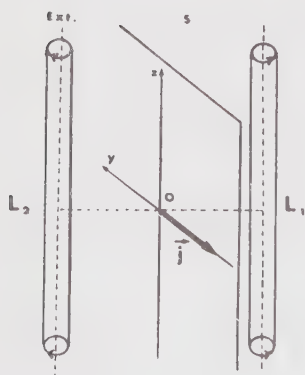
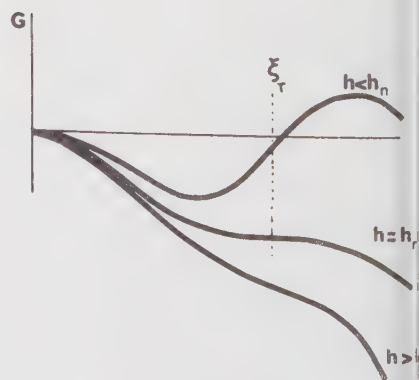


Fig. 13 et 13 bis. - Ligne et son image au voisinage de la surface



Chapitre II

Lignes de tourbillon de forme quelconque.

Jusqu'à présent, nous avons considéré les lignes de tourbillon isolées comme des droites parallèles entre elles et au champ magnétique appliqué. Lors de l'établissement d'un état d'équilibre, on sait que ces lignes se déplacent à l'intérieur du supraconducteur, sous l'effet de deux forces - D'une part la force due à la pression magnétique du champ appliqué (dans une épaisseur λ_T à partir de la surface du spécimen), d'autre part la force d'interaction avec les lignes déjà présentes dans l'échantillon. Or, le manque de réversibilité des courbes d'aimantation dans la plupart des supraconducteurs de seconde espèce montre que la répartition des lignes de tourbillon ne correspond pas à l'équilibre thermodynamique que nous avons calculé dans le chapitre précédent : des obstacles s'opposent au libre déplacement des lignes et on sait que ces obstacles sont des défauts du métal tels que joints de grains, amas de lacunes précipités et peut-être dislocations. Ces obstacles constituent des points d'ancrage pour les lignes. On peut se représenter une ligne de tourbillon dans un tel matériau comme une ligne brisée formée d'arcs joignant un point d'ancrage au suivant (figure 11). Chaque segment se courbe sous l'influence des différentes forces auxquelles il est soumis (champ magnétique, tension de ligne etc ...). Un tel comportement a de grandes analogies avec celui d'un ensemble de dislocations dans un cristal sous contrainte et comportant des défauts : en effet nous pouvons associer à la ligne de tourbillon, comme à une dislocation, une tension de ligne (énergie par unité de longueur). Outre l'énergie de tension les lignes sont soumises à des contraintes extérieures : contraintes élastiques pour les dislocations, et gradient de champ magnétique pour les tourbillons, plus, dans les deux cas, existence de points d'ancrage. On peut alors calculer en principe la configuration d'énergie minimum pour un ensemble donné de conditions extérieures. L'analogie n'est cependant pas totale : la ligne de tourbillon ne possède pas de plan de glissement mais sa direction moyenne est imposée par le champ magnétique extérieur. Une autre différence importante vient de la portée finie de la perturbation liée à la ligne de tourbillon, portée égale à l'épaisseur de pénétration λ , ce qui fait qu'il n'est pas nécessaire de faire intervenir de force image dès que la distance de la ligne à la surface est supérieure à λ .

Les hypothèses que nous faisons dans ce chapitre sont :

a) $\kappa \gg 1$ c'est-à-dire $\lambda_T \gg \xi_T$ ce qui veut dire que le volume occupé par le coeur de la ligne est négligeable devant le volume total de la ligne : ceci nous permet de traiter le coeur comme une singularité linéaire en dehors de laquelle l'équation de London s'applique et de décrire la ligne de tourbillon par l'équation (I, 7) que nous rappelons ici

$$\nabla^2 \mathbf{h} + \lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{h} = \frac{\phi_0}{2\pi} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

Nous utilisons pour calculer l'énergie interne supplémentaire due aux champs et aux courants l'équation (I, 5), mais étendue à tout l'espace

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V \left[\mathbf{h}^2 + (\lambda \text{rot } \mathbf{h})^2 \right] d\tau \quad (\text{II, 1})$$

et nous supposons que toute l'énergie du tourbillon est contenue dans cette intégrale. Nous avons vu au chapitre précédent qu'il existait une contribution à l'énergie due à la variation du paramètre d'ordre, qui ne peut excéder la valeur $W_{\text{coeur}} < H_c^2 / 8\pi \times \text{Volume du coeur} \approx H_c^2 \xi^2 / 8 = (\phi_0 / 8\pi \lambda)^2$. En fait, un calcul plus rigoureux montre que ce terme est à multiplier par un coefficient d'ordre 0.1, ce qui le rend toujours très petit devant les termes électromagnétiques. Nous le négligerons donc dans ce chapitre.

b) Nous supposons que la densité de lignes de tourbillon est en tout point suffisamment faible pour que les coeurs des lignes ne soient pas en contact, c'est-à-dire $d \gg \xi_T$, d étant la distance moyenne entre lignes. Cette restriction nous permet de décrire toujours les lignes par l'équation (I, 7) sans tenir compte de termes dus au recouvrement des coeurs.

Energie d'interaction d'une ligne de tourbillon avec un champ magnétique.

Nous supposons qu'il existe, à l'intérieur d'un supraconducteur massif une source qui crée dans un domaine fini une induction magnétique connue (par exemple une inclusion ferromagnétique de dimensions grandes par rapport à λ_T). Lorsqu'une ligne de tourbillon se trouve au voisinage de cette source, il apparaît une énergie supplémentaire d'interaction entre la ligne et ce champ magnétique.

Pour calculer ce terme, nous supposons qu'aucune des deux sources (l'inclusion et le tourbillon) n'est modifiée par la présence de l'autre et que le champ résultant est la somme des champs h_1 et h_2 dus aux deux sources, qui satisfont à l'équation de London

$$h_1 + \lambda^2 \text{rot rot } h_1 = 0 \quad \text{pour l'inclusion} \quad (\text{II}, 2)$$

$$h_2 + \lambda^2 \text{rot rot } h_2 = \phi_0 \delta(r - r(L)) \quad \text{pour le tourbillon}$$

Avec cette décomposition, il apparaît, en plus des termes d'énergie de chacune des sources un terme croisé décrivant l'énergie d'interaction.

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{4\pi} \int \left[h_1 \cdot h_2 + \lambda^2 (\text{rot } h_1 \cdot \text{rot } h_2) \right] d\tau \quad (\text{II}, 3)$$

qui, à l'aide de l'identité $\text{div} (h_1 \wedge h_2) = h_2 \cdot \text{rot } h_1 - h_1 \cdot \text{rot } h_2$

$$\begin{aligned} \text{peut se transformer} \quad W_{\text{int}} &= \frac{1}{4\pi} \int h_1 \cdot (h_2 + \lambda^2 \text{rot rot } h_2) d\tau \\ &= \frac{\phi_0}{4\pi} \oint_{L_1} h_1 \cdot d\ell_2 \end{aligned} \quad (\text{II}, 4)$$

Pour écrire II, 4, nous avons utilisé II, 2 et nous avons supposé que le volume occupé par l'inclusion était négligeable, mais que le champ n'y présentait pas de singularité. Ceci nous donne une formule générale de l'énergie d'interaction entre un champ magnétique et une ligne de tourbillon. Nous allons maintenant l'appliquer à différentes sources de champ magnétique.

Energie d'interaction de deux lignes.

Considérons un ensemble de deux lignes de tourbillon dans un échantillon très grand, de façon qu'elles soient constamment loin de la surface. Si elles sont suffisamment rapprochées l'une de l'autre, au moins sur une partie de leur longueur, il existe comme dans le cas précédent un terme d'interaction dans l'énergie du système. Nous admettons qu'on peut décomposer h en deux termes h_1 et h_2 correspondant aux deux lignes. Ces champs sont définis comme solutions des équations

$\vec{h}_i + \lambda^2 \text{rot rot } \vec{h}_i = \phi_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}(L_i)) \quad i = 1, 2 \text{ avec la condition}$
 aux limites $\vec{h}_i = 0$ à l'infini. (II, 5)

L'intégrale de volume (II, 1) est étendue à tout l'échantillon.
 On peut la transformer de la façon suivante.

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{h}_1^2 + (\lambda \text{rot } \vec{h}_1)^2) d\tau + \int (\vec{h}_2^2 + (\lambda \text{rot } \vec{h}_2)^2) d\tau$$

$$+ \frac{1}{8\pi} \int (\vec{h}_1 \cdot (\vec{h}_2 + \lambda^2 \text{rot rot } \vec{h}_2) + \vec{h}_2 \cdot (\vec{h}_1 + \lambda^2 \text{rot rot } \vec{h}_1)) d\tau \quad (\text{II, 6})$$

$$+ \frac{\lambda^2}{8\pi} \iint dS \cdot \left[(\vec{h}_1 \wedge \text{rot } \vec{h}_2) + (\vec{h}_2 \wedge \text{rot } \vec{h}_1) \right]$$

La première intégrale représente l'énergie individuelle de chaque ligne séparée et ne contribue donc pas à l'énergie d'interaction. La dernière intégrale est une intégrale de surface prise sur la surface de l'échantillon. On peut supposer que celle-ci est assez éloignée des deux lignes pour que $\vec{h}_1$ et $\vec{h}_2$ soient nuls à son niveau ; sa contribution à l'énergie est donc nulle. Compte tenu de (II, 5, 12 et 13) l'énergie d'interaction se réduit donc à :

$$W_{\text{int}} = \frac{\phi_0}{8\pi} \left[\oint_{L_1} \vec{h}_2(\vec{r}_1) \cdot d\vec{\ell}_1 + \oint_{L_2} \vec{h}_1(\vec{r}_2) \cdot d\vec{\ell}_2 \right] \quad (\text{II, 7})$$

où les intégrales sont des intégrales curvilignes prises le long de L_1 et de L_2 .

Energie d'interaction de deux lignes non parallèles.

L'équation de London pour une ligne isolée L non rectiligne, s'écrit,

$$-\Delta \vec{h} + \lambda^{-2} \vec{h} = -\frac{\phi_0}{\lambda^2} \delta(\vec{r} - \vec{r}(L))$$

La fonction de Green de l'équation sans second membre s'écrit

$$\vec{h}(\vec{r}) = \frac{\phi_0}{4\pi \lambda^2} \oint_L d\vec{\ell} \frac{e^{-|\vec{r} - \vec{r}_e|/\lambda}}{|\vec{r} - \vec{r}_e|} \quad (\text{II, 8})$$

Cette formule, déjà proposée par Moreau ⁽¹²⁾ et par Goodman ⁽⁸⁾, va nous permettre de calculer l'expression ^(II, 7). Si nous reportons l'expression ^(II, 8) du champ dans les deux intégrales de l'expression ^(II, 7), nous voyons qu'à cause du rôle équivalent des points 1 et 2, ces deux intégrales sont égales. Nous obtenons donc pour l'énergie d'interaction la formule suivante, également obtenue par Goodman ⁽⁸⁾

$$I_{12} = \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} dl_1 \cdot dl_2 \frac{e^{-|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2|/\lambda}}{|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2|} \quad (\text{II, 9})$$

Cette expression de l'interaction mutuelle de deux lignes sous forme d'une double intégrale curviligne est analogue à la formule de Blin donnant l'interaction de deux dislocations, mais elle est beaucoup plus simple : une ligne de tourbillon isolée a une symétrie cylindrique alors que le champ des contraintes lié à une dislocation est en général anisotrope.

Nous allons donner maintenant quelques applications de cette formule correspondant à des situations physiques et à des géométries particulièrement simples.

a) Interaction d'un filament avec lui-même. Tension de ligne.

Si nous appliquons la formule ^(II, 9) à l'interaction de chaque élément d'une ligne avec les autres éléments de la même ligne, nous obtenons le double de l'énergie propre de cette ligne. Si la ligne est rectiligne, on obtient évidemment la valeur, déjà obtenue directement, de l'énergie de ligne, à condition toutefois de choisir correctement la limite d'intégration nécessaire pour éviter la divergence de l'intégrale. Cette limite a un sens physique lorsque l'intégration est faite dans un plan perpendiculaire à la ligne car elle représente alors la limite du domaine où l'approximation de London est valable. Pour rendre ce calcul cohérent avec les précédents, nous choisissons la limite de façon à obtenir la même valeur de l'énergie de ligne. Soit x cette limite : on trouve immédiatement par intégration

$$W = \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \left[-\text{Ei}\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \right] \quad (\text{II, 10})$$

Cette formule coïncide avec l'expression ^(II, 6) si

a) $x = \xi_T$

b) $\frac{\xi_T}{\lambda} \ll 1$, ce qui correspond bien à l'hypothèse de valeur élevée de κ

b) Anneau de tourbillon en absence de champ magnétique.

La situation physique qui réalise ce cas peut être par exemple la suivante : lorsqu'un courant parcourt un fil supraconducteur de seconde espèce cylindrique, si le champ à la surface est supérieur à H_{c1} , il apparaît dans le fil des anneaux de tourbillon (figure 12). Si le champ est peu supérieur à H_{c1} , la densité de lignes est assez faible, et nous pouvons négliger les interactions entre lignes. Supposons qu'à un moment donné, on supprime le courant j . Chaque boucle formée est alors libre d'évoluer uniquement sous l'effet de ses interactions internes : intuitivement, on pense que l'interaction attractive entre deux points diamétralement opposés d'un anneau tend à resserrer celui-ci jusqu'à ce qu'il disparaisse. On s'attend à ce que l'énergie de la boucle tende de façon monotone vers zéro avec son rayon. Cependant, nous n'avons pas le droit de poursuivre le calcul jusqu'à cette limite, car le modèle cesse d'être correct lorsque le rayon devient de l'ordre de ξ_T .

L'énergie de la boucle vaut

$$W_a = \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \times 2\pi R \times \int_{\frac{\xi}{2R}}^1 \left(\frac{1}{x} - 2x \right) \frac{e^{-dx}}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (\text{II}, 11)$$

où $\alpha = \frac{2R}{\lambda}$

Nous savons calculer cette intégrale dans les deux cas limites $\alpha \ll 1$ et $\alpha \gg 1$

1°) $\alpha \ll 1$. On peut alors développer l'exponentielle ; on trouve :

$$W_a = \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \times 2\pi R \left[\text{Log} \frac{4R}{\xi} + \frac{3\xi^2}{16R^2} + \frac{1}{\kappa} - 2 \right] \quad (\text{II}, 12)$$

$\alpha \ll 1$

On voit que cette quantité, pour $R > 2\xi$ est une fonction croissante

de R et positive.

2°) $\alpha \gg 1$. Dans cette situation où le diamètre de l'anneau est très supérieur à λ , l'interaction entre deux éléments diamétralement opposés est nulle et l'énergie est essentiellement l'énergie de ligne augmentée d'un petit terme lié à la courbure. On trouve en effet

$$\frac{W_a}{\alpha \gg 1} = \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 2\pi R \left| \log \frac{\lambda}{\xi} \right| + O\left(\frac{\lambda}{R}\right)$$

Sans pouvoir donner le résultat général, nous pouvons affirmer qu'un anneau de tourbillon en absence d'interaction extérieure (champ magnétique extérieur, défauts du cristal permettant l'ancrage de l'anneau en plusieurs points etc ...) se contracte jusqu'à disparaître, en cédant l'énergie qu'il avait emmagasinée au supraconducteur. Nous avons fait par ailleurs un calcul ⁽¹³⁾ qui correspond à la situation plus physique où le courant total dans le cylindre est imposé et où nous tenons compte des interactions des boucles entre elles et avec le courant.

Energie d'une ligne au voisinage de la surface.

Lorsqu'une ligne de tourbillon se trouve à une distance d'une surface inférieure à λ , il est nécessaire de tenir compte de l'effet de cette surface sur la répartition des courants puisque ceux-ci ne peuvent lui être que tangentiels. La description de ligne isolée que nous avons donnée au chapitre II ne s'applique plus ; cependant à cause de la linéarité des équations, nous pouvons en première approximation éliminer l'effet de surface par une méthode d'image. Nous supposons de nouveau le milieu infini, mais nous ajoutons à la ligne L_1 son image dans un miroir fictif qui coïncide avec la surface (ceci suppose que la surface est un plan, au moins à l'échelle λ). Nous calculons alors l'énergie du système en introduisant dans la relation ^{II, 1)} trois sources de champ.

1°) Le champ h_1 provient de la ligne L_1 .

2°) Le champ h_2 provient de l'image L_2 de L_1 .

3°) Le champ h_3 est le champ extérieur constant, qui pénètre dans le supraconducteur suivant une loi exponentiellement décroissante (figure 13). Ces trois champs satisfont aux équations de London :

$$h_1 + \lambda^2 \text{rot rot } h_1 = \phi_0 \delta(x - x(L_1))$$

$$h_2 + \lambda^2 \text{rot rot } h_2 = \phi_0 \delta(x - x(L_2^+)) \quad (\text{II}, 13)^+$$

$$h_3 + \lambda^2 \text{rot rot } h_3 = 0 \text{ avec } h_3(0) = H$$

Nous pouvons décomposer l'expression (II, 1) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{8\pi} \sum_{i=1}^3 \int \left[h_i^2 + (\lambda \text{ rot } h_i)^2 \right] d\tau + \frac{1}{4\pi} \int (h_2 + h_3) \cdot (h_1 + \lambda^2 \text{rot rot } h_1) d\tau \\ & + \frac{\lambda^2}{4\pi} \int (h_2 + h_3) \wedge \text{rot } h_1 \cdot d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int h_3 \cdot (h_2 + \lambda^2 \text{rot rot } h_2) d\tau \\ & + \frac{\lambda^2}{4\pi} \int h_3 \wedge \text{rot } h_2 \cdot d\sigma . \end{aligned} \quad (\text{II}, 14)$$

Les intégrales de surface sont prises sur la surface de l'échantillon.

Compte tenu des équations (II, 13) et de l'identité facile à établir

$$\frac{\lambda^2}{4\pi} \int h_1 \wedge \text{rot } h_1 \cdot d\sigma = - \frac{\lambda^2}{4\pi} \int h_2 \wedge \text{rot } h_2 \cdot d\sigma = \frac{\phi_0}{8\pi} \oint_{L_1} h_2 \cdot d\ell_1 \quad (\text{II}, 15)$$

il reste finalement :

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{8\pi} \sum_{i=1}^3 \int \left[h_i^2 + (\lambda \text{ rot } h_i)^2 \right] d\tau + \frac{\phi_0}{8\pi} \oint_{L_1} h_2 \cdot d\ell_1 + \frac{\phi_0}{4\pi} \oint_{L_1} h_3 \cdot d\ell_1 \\ & + \frac{\lambda^2}{4\pi} \int h_3 \wedge (\text{rot } h_1 + \text{rot } h_2) \cdot d\sigma \end{aligned} \quad (\text{II}, 16)$$

Les contributions $i = 1$ et 2 du premier terme représentent l'énergie propre de la ligne L_1 en milieu infini et le terme $i = 3$ représente l'énergie

* Par construction, la somme $h_1 + h_2$ est nulle sur la surface.

magnétique du champ extérieur à l'intérieur du supraconducteur ; les deuxième et troisième termes représentent respectivement les énergies d'interaction de la ligne avec son image et avec le champ de pénétration de London.

Il n'est pas simple de donner une interprétation physique claire du dernier terme : si la ligne L_1 est droite et parallèle à la surface, le système est invariant par translation le long de la ligne et l'intégrale de surface est proportionnelle à l'intégrale prise le long de l'axe Oy (figure 13 bis) de la quantité $\text{rot } h_1 + \text{rot } h_2$, c'est-à-dire à la circulation du courant le long de Oy , donc à la fraction de flux de la ligne L_1 située par rapport à L_1 de l'autre côté du "miroir" (Nozières 14).

L'énergie W représente uniquement l'énergie électromagnétique à l'intérieur du supraconducteur. En réalité, le champ h_3 provient de sources extérieures dont il faut tenir compte si nous cherchons une situation d'équilibre. La grandeur thermodynamique à minimiser est alors non pas W mais l'énergie de Gibbs $G = W - B.H/4\pi \times V$ (V étant le volume de l'échantillon). L'induction B est la valeur moyenne des champs à l'intérieur de l'échantillon, soit

$$B = \frac{1}{V} \int (h_1 + h_2 + h_3) d\tau$$

Le terme provenant de h_3 ne nous intéresse pas, car il représente la contribution à l'énergie de Gibbs du champ extérieur, qui est constante. Il reste donc à évaluer

$$g' = - \frac{H}{4\pi} \cdot \int (h_1 + h_2) d\tau$$

Compte tenu des équations (II, 13)

$$\begin{aligned} g' &= - \frac{H \cdot \phi_0}{4\pi} \int \delta(\kappa - \kappa(L_1)) d\tau + \frac{\lambda^2 H}{4\pi} \cdot \int (\text{rot rot } (h_1 + h_2)) d\tau \\ &= - \frac{\phi_0}{4\pi} \oint_{L_1} H \cdot d\ell_1 - \frac{\lambda^2}{4\pi} \int H \wedge (\text{rot } h_1 + \text{rot } h_2) \cdot d\sigma \end{aligned} \quad (\text{II, 17})$$

En reportant II, 17 dans II, 16, on trouve finalement

$$g = \frac{\phi_0}{8\pi} \oint_{L_1} h_1(\kappa_1) \cdot d\ell_1 + \frac{\phi_0}{8\pi} \oint_{L_1} h_2(\kappa_1) \cdot d\ell_1 + \frac{\phi_0}{4\pi} \oint_{L_1} h_3(\kappa_1) \cdot d\ell_1 + \frac{\phi_0}{4\pi} \oint_{L_2} H \cdot d\ell_2 \quad (\text{II, 18})$$

La signification des différents termes est la suivante : le premier représente l'énergie de ligne de L_1 isolée, le second est l'énergie d'interaction de L_1 en présence de son image, le troisième est l'énergie de L_1 dans le champ de pénétration de London et le dernier représente l'énergie d'interaction de l'image avec le champ extérieur. Si la ligne L_1 est orientée parallèlement au champ, les trois premiers termes sont positifs, et le dernier est négatif.

Force s'exerçant sur une ligne au voisinage de la surface.

Si l'on fait subir à un élément $d\vec{\ell}_1$ de la ligne L_1 un petit déplacement $\delta\vec{S}$ perpendiculaire à $d\vec{\ell}_1$, l'énergie G varie de $\delta^2 G$. L'élément $d\vec{\ell}_1$ est donc soumis à une force $\delta\vec{F}$ telle que $\delta^2 G = -\delta\vec{F} \cdot \delta\vec{S}$. Nous allons calculer $\delta^2 G$ à partir de II, 18.

Les trois premiers termes sont de la forme $C_\alpha \oint \vec{h}_\alpha(r_1) \cdot d\vec{\ell}_1$

Il est plus commode de raisonner sur la contribution de l'élément $d\vec{\ell}_1$, à l'énergie soit $\delta G = \sum_\alpha C_\alpha \oint \vec{h}_\alpha(r_1) \cdot d\vec{\ell}_1$

Lorsqu'on effectue le déplacement $\delta\vec{S}$, δG varie de

$$\delta^2 G = \sum_\alpha C_\alpha \nabla \cdot (\vec{h}_\alpha(r_1) \cdot d\vec{\ell}_1) \cdot \delta\vec{S} \quad (\text{II, 19})$$

Compte tenu de l'hypothèse que $\oint \vec{S} \cdot d\vec{\ell}_1 = 0$ et du fait que $\text{div } \vec{h}_\alpha = 0$, on peut transformer (IV, 14) en

$$\delta^2 G = \sum_\alpha C_\alpha (\text{rot } \vec{h}_\alpha(r_1) \wedge d\vec{\ell}_1) \cdot \delta\vec{S} \quad (\text{II, 20})$$

Nous allons appliquer ce résultat à chaque terme séparément.

a) $\delta G_1 = \frac{\phi_0}{8\pi} \oint \vec{h}_1(r_1) \cdot d\vec{\ell}_1$. L'application directe de IV, 15 à ce terme ne donne pas le résultat correct : en effet, le champ $\vec{h}_1$ est le champ dû à la ligne elle-même : lorsqu'on déplace un élément $d\vec{\ell}_1$, on modifie la valeur de $\vec{h}_1$ en tous les autres points de la ligne, de sorte que l'énergie totale est modifiée. On peut évaluer cette modification de la façon suivante : supposons que nous puissions réaliser le déplacement de $d\vec{\ell}_1$ (fig. 14 a et b) sans modifier la valeur de $\vec{h}_1$ (d'après IV, 15) dans le reste de l'espace. Ce déplacement donne

une contribution $\delta_1^2 G = \frac{\phi_0}{8\pi} (\text{rot } h_1 \wedge d\ell_1) \cdot \delta S$

Le travail $\delta_2^2 G$ nécessaire pour établir la bonne distribution des champs est celui qu'il faut fournir pour déplacer toute la ligne de $-\delta S$, l'élément $d\ell_1$ restant fixe, c'est-à-dire l'opposé de celui qui fait passer de la configuration b à la configuration c. La somme des déplacements I et II est une translation de toute la ligne, représentant un travail nul :

$$\delta_1^2 G + (-\delta_2^2 G) = 0 \text{ donc } \delta_2^2 G = \delta_1^2 G = \frac{\phi_0}{8\pi} (\text{rot } h_1 \wedge d\ell_1) \cdot \delta S$$

La contribution du premier terme à la force est donc

$$\delta F_1 = \frac{\phi_0}{4\pi} d\ell_1 \wedge \text{rot } h_1$$

b) $\delta G_2 = \frac{\phi_0}{8\pi} h_2(r_1) \cdot d\ell_1$. Là aussi lorsqu'on déplace $d\ell_1$, on modifie h_2 : mais cette modification est entièrement contenue dans le fait que lorsqu'on éloigne la ligne de δS de la surface, elle s'éloigne de $2\delta S$ de son image. On trouve donc

$$\delta F_2 = \frac{\phi_0}{4\pi} d\ell_1 \wedge \text{rot } h_2$$

c) $\delta G_3 = \frac{\phi_0}{4\pi} h_3(r_1) \cdot d\ell_1$. L'application directe de II, 20 donne

$$\delta F_3 = \frac{\phi_0}{4\pi} d\ell_1 \wedge \text{rot } h_3$$

d) $\delta G_4 = -\frac{\phi_0}{4\pi} H \cdot d\ell_1$. Comme H est constant, $\delta F_4 = 0$

On voit que l'expression générale de la force s'exerçant sur une ligne est

$$\delta F = \frac{\phi_0}{4\pi} d\ell_1 \wedge \text{rot } h = \frac{\phi_0}{c} d\ell_1 \wedge j \quad (\text{II, 21})$$

où $h = h_1 + h_2 + h_3$ est le champ effectif au niveau du coeur de la ligne et j le courant total correspondant. Cette expression s'étend immédiatement au cas où la ligne est en interaction avec d'autres lignes.

emi anneau au voisinage de la surface en interaction avec un champ magnétique.

La géométrie est celle de la figure 15. Soit R le rayon du demi anneau que nous supposons grand devant ξ_T , mais petit devant λ_T . Compte tenu de l'orientation de l'image par rapport à la ligne, nous voyons que l'ensemble des deux est équivalent à une boucle complète. Le deuxième terme de II, 16 peut aussi s'écrire

$$\frac{\phi_0}{8\pi} \int_{L_1} h_2(x_1) dl_1 = \frac{\phi_0}{8\pi} \int_{L_2} h_1(x_2) dl_2$$

La somme des deux premiers termes représente donc exactement l'énergie d'une boucle telle que nous l'avons calculée précédemment (II, 12). Les deux derniers termes de (II, 16), au premier ordre en R/λ , valent $-\phi_0 H R^2 / 8\lambda$

Pour $R \gg \xi$, l'expression (II, 12) s'écrit

$$W_p = \left(\frac{\phi_0}{4\pi \lambda} \right)^2 \left(\log\left(\frac{R}{\xi}\right) + A + B \frac{\xi^2}{R^2} \right) \times 2\pi R$$

dont le terme principal est $W'_p = \left(\frac{\phi_0}{4\pi \lambda} \right)^2 \times 2\pi R \log \frac{R}{\xi}$. Etant donné les hypothèses déjà faites sur le sens de la limite ξ , nous admettrons que la forme de cette expression reste correcte pour R voisin de ξ , à un facteur numérique près. Si nous minimisons $W_{\text{tot}} = W_{\text{int}} + W'_p$, nous obtenons une relation entre H et R

$$\log \frac{R}{\xi} + 1 = \frac{H}{H_c \sqrt{2}} \frac{R}{\xi} \quad (\text{II, 22})$$

Nous pouvons alors étudier, en faisant abstraction de limitations de validité de cette expression, comment varie l'énergie de Gibbs en fonction de R , pour une valeur donnée de H . Il faut distinguer trois cas

a) $H < H_c \sqrt{2}$. L'équation II, 22 possède deux solutions correspondant à un minimum et un maximum. La configuration est celle de la figure 16.

b) $H = H_c \sqrt{2}$. On a un seul extremum qui correspond à une tangente d'inflexion

c) $H > H_c \sqrt{2}$. Il n'y a plus d'extremum : l'énergie est une fonction monotone décroissante de R .

Ce mécanisme pourrait donc décrire un processus de nucléation de l'aimantation dans un supraconducteur de type II : lorsque le champ est inférieur au champ de nucléation, la surface comporte un grand nombre de petites demi boucles de rayon R_0 qui sont stables et dont l'existence abaisse l'énergie du système. Lorsque le champ atteint la valeur critique, il n'y a plus de minimum relatif et les anneaux grandissent. Pour décrire la suite du processus de nucléation, il faut considérer que la géométrie de la demi boucle cesse d'être stable dès que son rayon devient comparable à λ . On peut supposer qu'à ce moment, la ligne va commencer à s'allonger le long de la paroi de façon à augmenter l'induction dans l'ensemble du supraconducteur. Ce modèle de nucléation est soumis à de graves réserves : tout d'abord, nous employons la formule de l'énergie d'une boucle en dehors de son domaine de validité. D'autre part, la méthode des images est correcte lorsque la ligne est parallèle à la surface, mais ne peut pas décrire le raccordement de la ligne avec la surface. Pearl (15) a fait ce calcul lorsque la ligne arrive perpendiculairement à la surface et a montré qu'elle s'épanouissait au voisinage de la surface, sur une profondeur λ à partir de celle-ci. Bien que le cas du champ parallèle à la surface soit différent du cas de Pearl, nous pouvons penser que le demi anneau de rayon ξ est très mal décrit par notre méthode. Il est cependant possible (Goodman et Matricon ⁽¹⁶⁾) que ce modèle soit qualitativement correct. Il donne en tout cas pour le champ de nucléation la valeur $H \sqrt{2}$, qui, au facteur $\sqrt{2}$ près, confirme la valeur H_c proposée par de Gennes ⁽¹⁷⁾ pour l'apparition d'une instabilité à la surface d'un supraconducteur. Le facteur $\sqrt{2}$ est lié au choix de la coupure dans le calcul d'énergie et n'a donc pas de signification précise.

Fig. 19. - Induction en fonction du champ extérieur dans les deux types de réseaux (début de la pénétration)

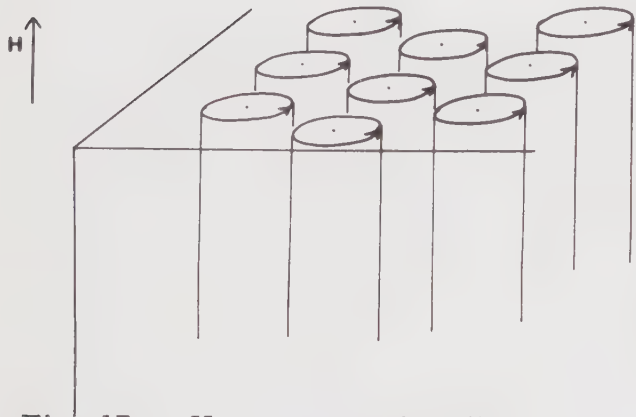


Fig. 17. - Vue perspective d'un réseau de tourbillons

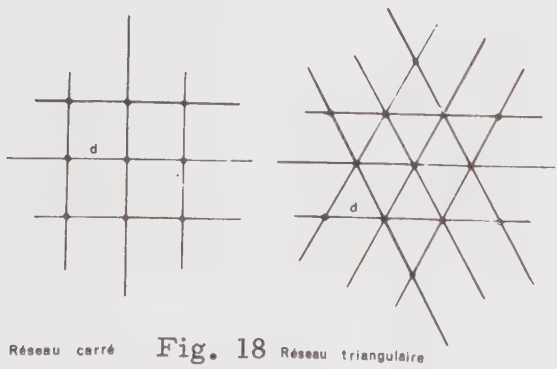
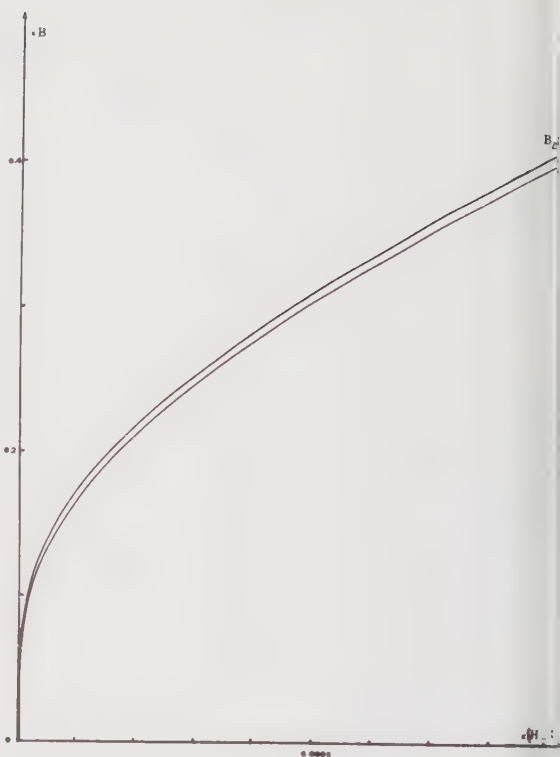


Fig. 18 Réseau triangulaire

Fig. 20. - Energie de Gibbs des deux types de réseaux en fonction du champ extérieur. L'énergie du réseau triangulaire est la plus basse



Chapitre III

Ensemble de vortex en interaction, Réseaux de vortex.

Dans le chapitre I nous avons étudié le problème d'un tourbillon isolé, c'est-à-dire d'un tourbillon suffisamment éloigné soit d'un autre tourbillon, soit d'une surface extérieure pour qu'il ne subisse aucune interaction. En réalité, il est difficile de créer de telles situations : dès que le champ extérieur dépasse H_{c1} , il pénètre dans le supraconducteur un nombre de lignes suffisamment grand pour qu'on ne puisse plus négliger l'interaction entre lignes. Cette interaction est répulsive, et l'état le plus stable dans un spécimen idéal est réalisé par un arrangement régulier des lignes en un réseau à deux dimensions (figure 17). Le calcul initial d'Abrikosov prévoyait que lorsque la distance d entre lignes est telle que $d > \lambda \gg \xi$, la maille du réseau le plus stable était d'abord triangulaire ($d \gg \lambda$) puis carrée ($d \sim \lambda$). Nous avons repris ce calcul et avons montré qu'en fait, dans le domaine considéré, le réseau triangulaire était toujours plus stable que le réseau carré. Etant donné la linéarité des équations de Maxwell et de London, la configuration de champs et de courants d'un ensemble de lignes est simplement la superposition des configurations correspondant à chaque ligne séparément. Nous pouvons donc considérer l'interaction d'une ligne avec toutes ses voisines comme une somme d'interactions de paires. Nous avons établi au chapitre II la forme de cette interaction pour deux lignes de forme quelconque. Lorsque les lignes sont parallèles, l'expression II, 9 s'intègre et on obtient le résultat connu (de Gennes ⁽¹⁸⁾)

$$I_{12} = \frac{\phi_0^2}{8\pi^2 \lambda^2} K_0 \left(\frac{|r_1 - r_2|}{\lambda} \right) \quad (\text{III, 1})$$

Cette énergie est positive et c'est une fonction décroissante de la distance entre lignes : la force d'interaction est donc répulsive ; le supraconducteur étant isotrope, elle est dirigée suivant la droite qui joint les centres des deux lignes et a pour valeur

$$F = - \frac{\partial W}{\partial (|r_1 - r_2|)} = \frac{\phi_0^2}{8\pi^2 \lambda^3} K_1 \left(\frac{|r_1 - r_2|}{\lambda} \right) \quad (\text{III, 2})$$

Réseaux ordonnés de vortex. Abrikosov a montré que lorsqu'un supraconducteur de deuxième espèce idéal est dans la phase tourbillonnaire, l'équilibre thermodynamique correspond à un réseau régulier de lignes de tourbillon parallèles au champ extérieur. Ce résultat est établi de façon rigoureuse au voisinage de H_{c2} où l'induction est très voisine du champ appliqué et où les lignes sont très proches les unes des autres. Leur distance moyenne est de l'ordre de ξ_T et la description à l'aide du modèle de ligne isolée n'a aucun sens. Au voisinage de H_{c1} par contre, la distance entre lignes est de l'ordre de λ_T et cette description est justifiée. On peut alors considérer que la pénétration du champ dans le supraconducteur se fait par une juxtaposition de lignes de tourbillon parallèles, en équilibre sous l'influence de la pression magnétique et de leurs interactions mutuelles. Chaque ligne porte un seul quantum de flux, de sorte que le flux par unité de surface perpendiculairement au champ, c'est-à-dire la valeur moyenne du champ, donc l'induction vaut $B = n \phi_0$ (n est le nombre de lignes dans l'unité de surface considérée. Dans un supraconducteur idéal en équilibre, n est constant dans tout l'échantillon).

Abrikosov a calculé la valeur de l'induction qui minimise l'énergie de Gibbs du système, pour un champ extérieur donné. Dans ce calcul, il fait une évaluation de l'énergie d'interaction du réseau. C'est cette évaluation que nous allons étudier.

Nous admettons que l'interaction entre les lignes du réseau est une somme d'interactions de paires. L'énergie totale s'écrit :

$$W_{\text{int}} = \sum_{i>j} F_{ij} = \frac{n}{2} \sum_{j \neq 0} F_{0j} = n \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \sum_{j \neq 0} K_0 \left(\frac{r_j}{\lambda} \right) \quad (\text{III, 3})$$

L'origine est située sur une ligne arbitraire et l'énergie est calculée pour l'unité de volume. Le calcul de cette somme dépend de la symétrie du réseau et de la distance entre lignes, comparée aux deux longueurs caractéristiques du problème.

a) Symétrie du réseau. Le calcul est fait pour un supraconducteur infini, homogène et isotrope. Il est probable que l'ordre réalisé par le réseau correspond à la plus haute symétrie possible. Les deux réseaux compacts de plus haute

symétrie sont le réseau carré et le réseau hexagonal centré (fig. 18). Nous n'avons comparé que ces deux réseaux comme l'avait fait Abrikosov. (Récemment Saint James et Sarma ⁽¹⁰⁾ ont montré qu'au voisinage de H_{c2} , le réseau hexagonal centré était le plus stable de tous les réseaux possibles.)

b) Distance entre lignes. La validité du modèle de coeur dur s'étend en principe jusqu'au moment où les coeurs durs sont en contact. En réalité, ce modèle est une approximation valable seulement pour les supraconducteurs à κ très élevé. On peut cependant continuer à l'employer pour des valeurs de κ plus faibles, à condition que les distances entre lignes restent grandes par rapport à $\xi(T)$.

Au voisinage de H_{c2} , la distance entre lignes est environ $2.7 \xi_T$ et nous savons qu'à cette valeur, l'approximation de coeur dur n'est plus valable, car l'énergie du coeur dépend de la distance entre lignes et notre calcul néglige ce terme. Comme la distance entre lignes est, dès le début de la pénétration, d'ordre λ_T , nous voyons qu'il faut des valeurs de κ supérieures à 10 pour qu'il existe un domaine de validité de notre modèle.

Equilibre du réseau sous contrainte. Abrikosov donne l'expression de l'énergie libre pour les deux types de réseaux en fonction de la distance δ entre plus proches voisins. Cette distance dépend

a) de la densité de lignes, donc de l'induction magnétique

b) de la nature du réseau. Pour le réseau carré elle vaut $\delta_c = \sqrt{\frac{\Phi_0}{B}}$

et pour le réseau triangulaire $\delta_T = \sqrt{\frac{2\Phi_0}{3B}}$

L'énergie interne du "cristal" de lignes est la somme

a) des énergies individuelles de chaque ligne,

b) des interactions de paires.

$$F = n\sigma + W_{int} \quad (III, 4)$$

Dans cette somme, n est le nombre de lignes par unité de surface perpendiculairement au champ, σ est la tension de ligne, donnée par l'expression (I, 6) et W_{int} est l'expression (III, 3). La quantité qu'on doit minimiser pour

obtenir l'équilibre thermodynamique est non pas F mais l'énergie de Gibbs du système, c'est-à-dire $G = F - \frac{B H}{4\pi}$; en effet nous cherchons l'état le plus stable pour un champ extérieur donné et constant, sans nous préoccuper du travail éventuellement fourni par les sources de ce champ pour le maintenir constant lorsque nous faisons varier la structure du réseau et par conséquent l'induction. Dans ces conditions, c'est bien l'énergie de Gibbs qui constitue la "bonne" grandeur thermodynamique (Landau et Lifshitz ⁽¹⁹⁾). La pénétration du flux magnétique débute lorsque le champ extérieur atteint la valeur H_{cl} . En effet, pour des valeurs inférieures à H_{cl} , toute solution avec pénétration aurait donné pour l'énergie de Gibbs une valeur $G \geq n(\Phi - \phi_o H/4\pi) > 0$. H_{cl} est la valeur du champ pour laquelle cette expression s'annule, d'où la relation

$$\Phi = \frac{\phi_o H_{cl}}{4\pi} \quad (III,5)$$

$$\text{soit} \quad H_{cl} = \frac{\phi_o}{4\pi \lambda^2} \text{Log } \kappa \quad (III,6)$$

Pour $H > H_{cl}$, on a

$$G = \sum_{i>j} F_{ij} + \frac{B}{4\pi} (H_{cl} - H) \quad (III,7)$$

L'énergie d'interaction peut s'écrire en exprimant la distance entre lignes à l'aide des paramètres δ_c ou δ_T

$$\sum_{i>j} F_{ij} = \frac{n}{2} \sum_{j \neq 0} F_{0,j} = \frac{B \phi_o}{(4\pi \lambda)^2} \sum_{j \neq 0} K_0\left(\frac{\rho_j \delta}{\lambda}\right) = \frac{B \phi_o}{(4\pi \lambda)^2} \sum_{j \neq 0} K_0\left(\frac{\rho_j}{\lambda} \alpha \sqrt{\frac{\phi_o}{B}}\right) \quad (III,8)$$

où ρ_j est la distance du j^m site à l'origine exprimée en unités de δ , et α un paramètre qui vaut 1 pour le réseau carré et $\sqrt{\frac{2}{3}}$ pour le réseau triangulaire. La sommation est étendue à tous les voisins.

Ecrivons que G est minimum par rapport à une variation de B . Nous obtenons une relation implicite entre H et B qui est l'équation de la courbe d'aimantation

$$H - H_{c1} = \frac{\phi_0}{8\pi \lambda^2} \sum_{j \neq 0} \left[2 K_0 \left(\frac{\rho_j}{\lambda} \delta \right) + \frac{\rho_j}{\lambda} \delta K_1 \left(\frac{\rho_j}{\lambda} \delta \right) \right] \quad (\text{III}, 9)$$

Pour un champ magnétique donné, nous connaissons donc les valeurs de B correspondant aux deux types de réseaux en résolvant numériquement l'équation précédente. Tant que le paramètre δ/λ n'est pas trop petit devant 1, à cause de la décroissance exponentielle des fonctions K_0 et K_1 pour les valeurs élevées de l'argument, la convergence de la somme est rapide. En prenant comme variable non plus B mais $2\pi\lambda^2/\phi_0 B$, on obtient une équation universelle, qui ne dépend pas des grandeurs caractéristiques du supraconducteur

$$\frac{2\pi \lambda^2}{\phi_0} (H - H_{c1}) = \frac{1}{4} \sum_{j \neq 0} 2 K_0 \left[\rho_j \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2 B}} \right] + \rho_j \sqrt{2\pi} \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2 B} K_1 \left[\rho_j \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2 B}} \right] \quad (\text{III}, 10)$$

Les valeurs obtenues sont reportées sur le tableau I et pour les petites valeurs de $H - H_{c1}$, sur la figure (19). On remarque notamment que la courbe $B(H)$ présente une tangente verticale à $H = H_{c1}$. On voit également que les courbes d'aimantation des deux types de réseaux ne coïncident pas, l'induction du réseau triangulaire étant légèrement supérieure à celle du réseau carré, comme on pouvait s'y attendre du fait que ce dernier est moins compact que le premier.

De Gennes (18) a montré que dans la région de moyenne densité de lignes ($\xi \ll \delta \ll \lambda$), l'équation de la courbe d'aimantation s'écrit

$$H = B + H_{c1} \frac{\text{Log } \beta d / \xi}{\text{Log } \lambda / \xi} \quad (\text{III}, 11)$$

où β est une constante numérique.

Nous pouvons transformer cette équation en

$$\frac{2\pi \lambda^2}{\phi_0} (H - H_{c1}) = \frac{2\pi \lambda^2}{\phi_0} B - \frac{1}{4} \text{Log} \left(\frac{2\pi\lambda^2 B}{\phi_0} \right) - \beta_1 \quad (\text{III}, 12)$$

β_1 est une nouvelle constante numérique, reliée à β ($\beta_1 = -\frac{1}{2} \text{Log}(\sqrt{2\pi} \beta)$ pour le réseau carré et $\beta_1 = -\frac{1}{2} \text{Log} \beta \sqrt{\frac{4\pi}{\sqrt{3}}}$ pour le réseau triangulaire)

$$\text{Les droites } \frac{2\pi \lambda^2}{\phi_0} (H - H_{c1}) = f \left[\frac{2\pi \lambda^2}{\phi_0} B - \frac{1}{4} \text{Log} \frac{2\pi \lambda^2}{\phi_0} B \right] - \beta_1$$

coïncident exactement avec les courbes obtenues numériquement dans la région des moyennes densités ($\gamma 100 < 2\pi \lambda^2 / \phi_0 (H - H_{c1}) < 200$) à condition de choisir pour β_1 les valeurs

$$\begin{cases} \beta_1 = 0.503 \text{ pour le réseau carré} \\ \beta_1 = 0.509 \text{ pour le réseau triangulaire} \end{cases}$$

(On en déduit immédiatement les valeurs du paramètre β de de Gennes : $\beta = 0.4352$ pour le réseau carré et $\beta = 0.3815$ pour le réseau triangulaire.)

En reportant l'expression (III, 15) de $H - H_{c1}$ dans la définition de l'énergie de Gibbs (III, 12), on trouve

$$G = \frac{B \phi_0}{32\pi^2 \lambda^2} \sum_{j \neq 0} \rho_j \sqrt{\frac{\phi_0}{\lambda^2 B}} K_1 \left[\rho_0 \sqrt{\frac{\phi_0}{\lambda^2 B}} \right] \quad (\text{III, 13})$$

Connaissant numériquement la fonction $B(H)$ pour chaque réseau, nous avons calculé numériquement $G[B(H)]$ pour H donné et pour les deux réseaux. Le résultat de ce calcul est reporté dans le tableau (I) et sur la figure (20). On vérifie facilement que $dG/dH \sim -B/4\pi$ ce qui donne une pente nulle à l'origine mais variant très rapidement avec $H - H_{c1}$. On voit sur les résultats que l'énergie de Gibbs du réseau triangulaire est plus basse que celle du réseau carré dès le début de la pénétration, conformément à ce qu'avait prévu Abrikosov, mais que cette inégalité persiste dans tout le domaine du calcul, c'est-à-dire jusqu'à la région des densités moyennes. Nous montrons donc que du début de la pénétration jusqu'à des régions où $\xi \ll d \ll \lambda$, le réseau triangulaire est plus stable que le réseau carré. Ce résultat a été complété par Autler, Kleiner et Roth ⁽²⁰⁾ qui ont montré qu'au voisinage de H_{c2} , c'est-à-dire pour $d \sim \xi_T$ on avait encore le même résultat. Nous avons déjà signalé que Saint-James et Sarma ⁽¹⁰⁾ ont dans le même domaine de densité, c'est-à-dire près de H_{c2} , généralisé le calcul de Kleiner, Roth et Autler en démontrant que le réseau triangulaire régulier était le plus stable de

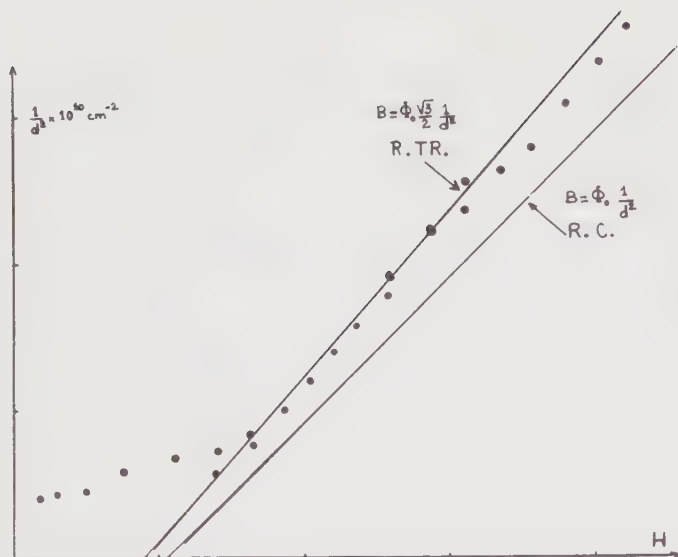


Fig. 21. - Valeurs de d obtenues par diffraction des neutrons. Les droites correspondent aux réseaux triangulaire et carré. (Résultats obtenus sur du Nb)

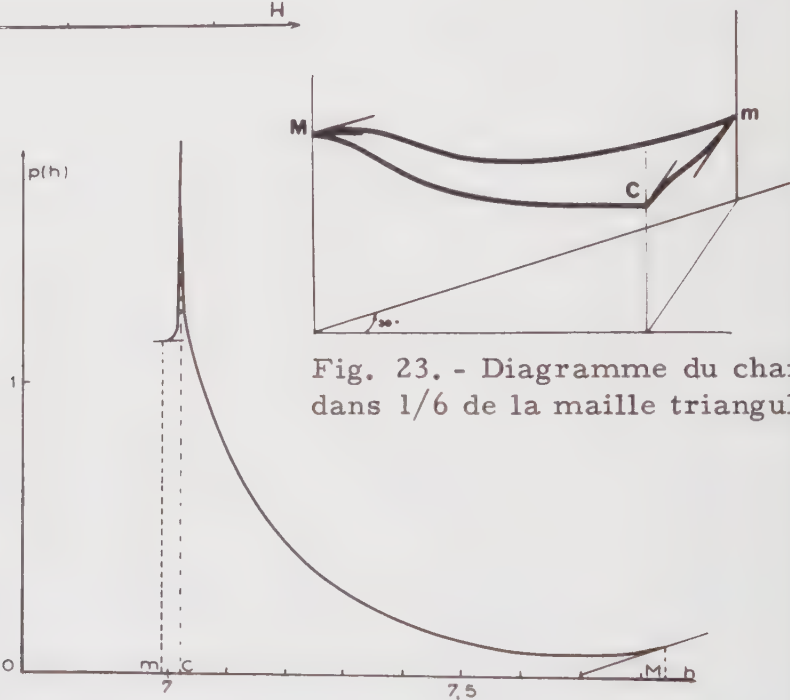


Fig. 23. - Diagramme du champ dans $1/6$ de la maille triangulaire.

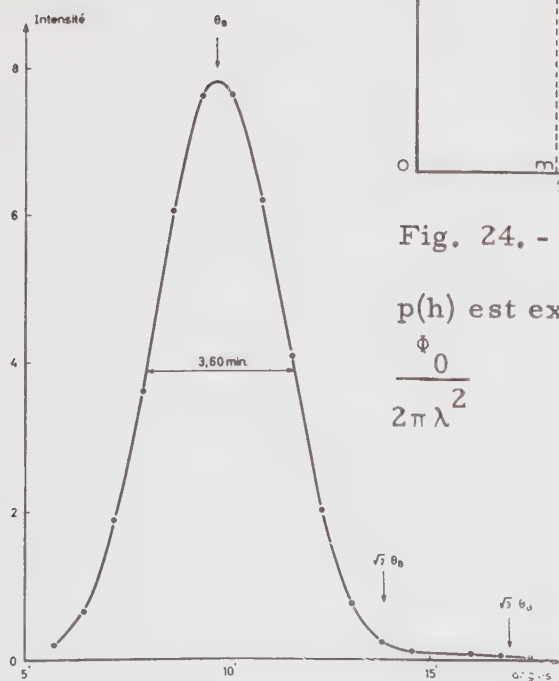


Fig. 22. - Raie de diffraction de neutrons par le réseau de tourbillons dans du Nb

Fig. 24. - Courbe $p(h)$ tracée pour $\kappa = 10$ et $d/\lambda = 1$. $p(h)$ est exprimé en unités de $\frac{\pi^2 \lambda^4}{\Phi_0}$ et h en unités de $\frac{\Phi_0}{2\pi \lambda^2}$.

de tous les réseaux plans possibles.

Il existe une vérification expérimentale de cette structure triangulaire : c'est l'expérience de diffraction de neutrons faite par Jacrot, Cribier etc... (21) sur un supraconducteur de seconde espèce dans l'état de Shubnikov : il est possible d'obtenir une réflexion de Bragg sur le réseau de lignes de tourbillon et par conséquent d'en déduire une distance réticulaire. Connaissant l'induction qu'on a mesurée par ailleurs, on peut comparer le paramètre de réseau obtenu directement avec ceux que donnerait l'induction mesurée, avec un réseau carré et avec un réseau triangulaire (figure 21). On voit que dans tout le domaine de champ exploré, c'est au réseau triangulaire que correspond la distance réticulaire mesurée. Il n'est malheureusement pas possible d'obtenir d'autres pics que le premier pic de Bragg ce qui a pu faire penser qu'il s'agissait non pas d'un "cristal", mais d'un "liquide" caractérisé par un ordre à courte distance. Le paramètre qu'on mesure est alors la distance moyenne entre voisins, et, le réseau triangulaire étant le plus compact, il n'est pas étonnant que cette distance moyenne soit égale à son paramètre. Cette hypothèse du "liquide" est tout à fait compatible avec le résultat que nous décrivons au paragraphe suivant, concernant la valeur très faible du coefficient de cisaillement du réseau, comparé au coefficient de compressibilité : le rapport de ces deux coefficients est d'ordre $(d/\lambda)^2$, d étant la maille du réseau. Ce rapport est d'autant plus faible que la pénétration du flux est plus forte. L'état liquide est donc plus probable à haute densité qu'à faible densité. Mais l'hypothèse du "liquide" a été réfutée par les auteurs de l'expérience par trois arguments :

a) La répartition du champ et par conséquent le facteur de forme du centre diffusant tels qu'on peut les calculer près de H_{c2} ne donnent pas de second pic de Bragg décelable pour le réseau triangulaire, alors qu'ils en donnent un pour le réseau carré. Le fait qu'on n'en observe pas est donc une confirmation supplémentaire de la structure triangulaire.

b) La raie de diffraction observée est extrêmement symétrique et étroite (figure 22) ce qui ne serait pas le cas pour un liquide.

c) L'intensité de la raie, mesurée avec un spectromètre à bonne résolution n'est pas reproductible d'une expérience à l'autre, alors que sa forme et sa position le sont. Cribier et Jacrot interprètent ce résultat en supposant que

le "cristal" de lignes est en fait un polycristal à faible nombre de cristallites. Seuls contribuent à la diffusion les cristallites qui sont bien orientés par rapport au faisceau incident. S'il y a peu de cristallites, leur répartition étant aléatoire d'une expérience à la suivante, il peut y avoir une fluctuation importante du pouvoir diffusant qui explique la non reproductibilité de l'intensité.

Coefficients d'élasticité d'un réseau de vortex. Nous avons jusqu'à présent examiné les propriétés thermodynamiques d'un réseau de lignes en équilibre sous l'action de la pression magnétique extérieure et de leurs interactions répulsives. Nous allons maintenant étudier la réaction de ce réseau vis-à-vis d'un petit déplacement des lignes hors de leur position d'équilibre. Ce comportement est régi par le fait que les interactions entre lignes sont à portée finie (λ) mais, dans le domaine des densités moyennes, cette portée est grande par rapport à la distance entre lignes. Chaque ligne est donc en interaction avec un nombre élevé de lignes voisines. On peut donc penser qu'un tel système présentera peu de résistance à une déformation de cisaillement puisque dans un tel déplacement, les distances moyennes entre lignes varient de quantités qui sont du second ordre par rapport au déplacement alors qu'une déformation de type compression donnera une variation beaucoup plus grande de l'énergie libre du cristal. Cette propriété devra apparaître dans le calcul des coefficients d'élasticité du réseau. Le calcul doit nous permettre également de vérifier la stabilité du réseau triangulaire par rapport au réseau carré : la force d'interaction entre lignes ne dépend que de la distance ; pour cette raison, tout réseau dans lequel chaque point est un centre de symétrie correspond à un extremum relatif de l'énergie libre. Comme nous l'avons vu, seuls le réseau carré et le réseau triangulaire équilatéral ont cette propriété à deux dimensions. On passe de l'un à l'autre par un cisaillement : L'énergie libre du réseau carré étant plus haute que celle du réseau triangulaire, on s'attend à ce que le cisaillement qui amène du premier au second soit, au moins en partie, responsable de cet abaissement de l'énergie libre et donc que le coefficient de cisaillement du réseau carré soit négatif, celui du réseau triangulaire étant positif.

Nous allons voir qu'il en est effectivement ainsi. (Il faut remarquer que cette condition (valeur négative du coefficient de cisaillement) est une condition suffisante d'instabilité pour un réseau, mais absolument pas une condition nécessaire.)

1°) Calcul de l'énergie libre du réseau déformé.

Nous calculons l'énergie libre du réseau de lignes dans un volume donné de supraconducteur. Ce volume est un volume de référence qui reste inchangé lorsque le réseau se déforme. C'est par exemple un cylindre dont l'axe est parallèle au champ magnétique et dont la base est l'unité de surface.

Lorsqu'on déforme le réseau, il faut tenir compte, d'une part de la variation de l'énergie d'interactions entre lignes, d'autre part de la variation du nombre de lignes dans l'unité de surface. Soit $\vec{\xi}_i$ le déplacement de la i^{me} ligne par rapport à sa position d'équilibre. Le développement au second ordre de l'énergie de Gibbs des N lignes contenues initialement dans l'unité de surface s'écrit

$$G^N = G_0^N + \sum_{i>j} \vec{\nabla} V_{ij} \cdot (\vec{\delta}_i - \vec{\delta}_j) + \frac{1}{2} \sum_{i>j} \left[\frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial x^2} (\delta_i - \delta_j)_x^2 + 2 \frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial x \partial y} (\delta_i - \delta_j)_x (\delta_i - \delta_j)_y + \frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial y^2} (\delta_i - \delta_j)_y^2 \right] + \dots \quad (\text{III}, 14)$$

Les déplacements δ_x, δ_y sont supposés petits. On peut donc les développer au premier ordre :

$$(\delta_i - \delta_j)_x = \frac{\partial \delta x}{\partial x} x_{ij} + \frac{\partial \delta x}{\partial y} y_{ij} \quad (\text{III}, 15)$$

La surface occupée initialement par les N lignes varie au cours du déplacement. Au second ordre en δ , elle s'écrit :

$$\sum_0^N = \sum_0^N \left(1 + \text{div } \vec{\delta} + \frac{\partial \delta x}{\partial x} \frac{\partial \delta y}{\partial y} - \frac{\partial \delta x}{\partial y} \frac{\partial \delta y}{\partial x} + \dots \right) \quad (\text{III}, 16)$$

Si nous calculons maintenant G^N / Σ^N en tenant compte de (III, 14) et de (III, 16) il vient

$$\begin{aligned}
G &= G_0 + \frac{\partial \delta x}{\partial x} \left[\frac{1}{\sum_0^N} \sum_{i>j} x_{ij} \frac{\partial V}{\partial x} ij - \frac{G_0^N}{\sum_0^N} \right] + \frac{\partial \delta y}{\partial y} \left[\frac{1}{\sum_0^N} \sum_{i>j} y_{ij} \frac{\partial V}{\partial y} ij - \frac{G_0^N}{\sum_0^N} \right] \\
&- \frac{1}{\sum_0^N} \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} \right) \sum_{i>j} \left[\frac{\partial \delta x}{\partial x} x_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} ij + \frac{\partial \delta y}{\partial y} y_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} ij \right] \\
&+ \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} \right)^2 \left[- \frac{1}{\sum_0^N} \sum_{i>j} x_{ij} \frac{\partial V}{\partial x} ij + \frac{1}{2 \sum_0^N} \sum_{i>j} x_{ij}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} ij + \frac{G_0^N}{\sum_0^N} \right] \\
&+ \left(\frac{\partial \delta y}{\partial y} \right)^2 \left[- \frac{1}{\sum_0^N} \sum_{i>j} y_{ij} \frac{\partial V}{\partial y} ij + \frac{1}{2 \sum_0^N} \sum_{i>j} y_{ij}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} ij + \frac{G_0^N}{\sum_0^N} \right] \\
&+ \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta y}{\partial y} \right) \left[\frac{G_0^N}{\sum_0^N} + \frac{1}{\sum_0^N} \sum_{i>j} x_{ij} y_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} ij \right] \\
&+ \left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} \right) \left[\frac{G_0^N}{\sum_0^N} + \frac{1}{2 \sum_0^N} \sum_{i>j} \left(y_{ij}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} ij + x_{ij}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} ij + 2 x_{ij} y_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} ij \right) \right]
\end{aligned}$$

(III, 17)

On sait qu'au voisinage de l'équilibre, le potentiel thermodynamique est une fonction quadratique de la déformation. Les termes du premier ordre doivent donc être nuls d'où les deux relations

$$G_0^N = \sum_{i>j}^N x_{ij} \frac{\partial V}{\partial x} ij$$

(III, 18)

$$G_0^N = \sum_{i>j}^N y_{ij} \frac{\partial V}{\partial y} ij$$

Dans le réseau carré, les deux sommes sont manifestement égales. Montrons qu'il en est ainsi dans le réseau triangulaire. Soit θ une rotation qui amène le réseau sur lui-même. Le potentiel ne dépendant que de r , on peut écrire les sommes sous la forme

$$\sum_{i>j} \frac{x_{ij}^2}{r_{ij}} \frac{\partial V}{\partial r} ij = \frac{n}{2} \sum_{j \neq 0} \frac{x_j^2}{r_j} \frac{\partial V}{\partial r} j = \frac{n}{2} \sum_{j \neq 0} \frac{(X_j \cos \theta - Y_j \sin \theta)^2}{r_j} \frac{\partial V}{\partial r} j$$

La contribution du terme $\sum \frac{X_j Y_j}{r} \frac{\partial V}{\partial r} j$ est nulle par symétrie, et, le réseau se superposant à lui-même,

$$\sum \frac{x_j^2}{r_j} \frac{\partial V}{\partial r_j} = \sum \frac{y_j^2}{r_j} \frac{\partial V}{\partial r_j}$$

Il reste donc

$$\sum \frac{x_j^2}{r_j} \frac{\partial V}{\partial r_j} = \sum \frac{y_j^2}{r_j} \frac{\partial V}{\partial r_j}, \text{ ce qui établit bien l'égalité des deux sommes}$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i>j} x_{ij} \frac{\partial V}{\partial x} ij + \sum_{i>j} y_{ij} \frac{\partial V}{\partial y} ij \right] \\ &= \frac{n}{4} \sum_{j \neq 0} r_{0j} \frac{\partial V}{\partial r} 0j = - \frac{B\phi_0}{32\pi^2 \lambda^2} \sum_{j \neq 0} \frac{r_j}{\lambda} K_1 \left(\frac{r_j}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (\text{III, 19})$$

On retrouve bien l'expression (III, 14) de l'énergie de Gibbs du réseau. Compte tenu de ces résultats, le développement du potentiel thermodynamique se simplifie et le terme quadratique ne dépend plus que de quatre coefficients.

$$G = G_0 + \frac{1}{2} \lambda_1 \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 \left(\frac{\partial \delta y}{\partial y} \right)^2 + (\lambda_3 - 2 G_0) \frac{\partial \delta r}{\partial x} \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{1}{2} \lambda_3 \left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{III, 20})$$

Les coefficients λ_1 , λ_2 et λ_3 sont des sommes sur tous les points du réseau faisant intervenir les dérivées secondes de l'énergie d'interaction

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sum_{i>j} x_{ij}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} ij & \lambda_2 &= \sum_{i>j} y_{ij}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} ij & \lambda_3 &= \frac{1}{2} \sum_{i>j} x_{ij}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} ij + \frac{1}{2} \sum_{i>j} y_{ij}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} ij \end{aligned} \quad (\text{III, 21})$$

Par un raisonnement équivalent à celui que nous venons de faire pour les sommes figurant dans les termes du premier ordre, nous pouvons démontrer que pour le réseau triangulaire, $\lambda_1 = \lambda_2$ et que les deux sommes qui figurent dans λ_3 sont égales. Pour les réseaux symétriques, l'énergie de Gibbs du réseau peu déformé se développe donc à l'aide de trois coefficients d'élasticité dont l'un, λ_2 est un coefficient de cisaillement et les deux autres λ_1 et $\lambda_3 = 2 G_0$ des coefficients de compressibilité hydrostatique.

2°) Calcul du coefficient de cisaillement. A cause des symétries du réseau, nous savons que λ_3 peut s'écrire

$$\lambda_3 = \frac{n}{2} \sum_{j \neq 0} x_j^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \text{ o}j$$

Cette somme sur tous les points d'un réseau direct, origine exclue, peut s'évaluer également par sommation sur tous les points de l'espace réciproque, à condition d'en retrancher la valeur moyenne de la transformée de Fourier. Si on appelle $f(x, y)$ la fonction dont on calcule la somme et $G(k_x, k_y)$ sa transformée de Fourier, on a

$$\lambda_3 = \frac{n}{2} \sum_{j \neq 0} f(x_j, y_j) = \frac{n^2}{2} \sum_{\substack{\text{Réseau} \\ \text{Réciproque}}} G(k_x, k_y) - \frac{n}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(k_x, k_y) dk_x dk_y$$

La fonction $G(k_x, k_y)$ est facile à calculer (voir Appendice II) et l'intégrale est une grandeur d'ordre ϕ_0^2/λ^2 . Sa contribution en $n\phi_0^2/\lambda^2 = B\phi_0/\lambda^2$ est du même ordre de grandeur que la sommation, puisque l'intégrale est précisément la valeur moyenne de la somme. D'autre part, on sait que G_0 est d'ordre B^2 c'est-à-dire $B\phi_0/d^2$. On voit donc que lors d'une déformation de type compression hydrostatique, la variation d'énergie de Gibbs est d'ordre $(\lambda/d)^2$ fois la variation due à une déformation de cisaillement pur de même amplitude. On retrouve ainsi l'analogie du résultat établi différemment (de Gennes et Matricon) (22) sur les coefficients de Lamé d'un polycristal de lignes ; mais il n'est pas possible a priori de déduire les coefficients de Lamé des coefficients d'élasticité du cristal que nous calculons ici, car ces derniers ne satisfont pas à la condition d'isotropie requise (cf. Landau et Lifshitz, 23). Cependant récemment, Fetter, Hohenberg et Pincus (24) ont montré que le second coefficient de Lamé

était égal au coefficient de cisaillement.

Le calcul des coefficients λ_1 et λ_3 fait intervenir une sommation sur tous les points du réseau d'une fonction à portée finie, mais longue comparée à la distance entre lignes, du moins dans le domaine qui nous intéresse ici, c'est-à-dire $\lambda \gg d \gg \xi$, domaine où se situent les conditions de validité du modèle. La méthode d'Ewald est tout à fait adaptée à ces conditions et c'est celle que nous avons employée, plutôt qu'une sommation directe dont la convergence serait très lente. (Voir Appendice II). Les résultats concernant le coefficient λ_3 sont reportés sur le tableau II ; nous voyons que ce coefficient a une valeur positive pour le réseau triangulaire et négative pour le réseau carré. Ce dernier est donc instable par rapport à une déformation de cisaillement, ce qui confirme le résultat obtenu par comparaison des énergies de Gibbs.

Tableau II

	réseau carré	réseau triangulaire
$\lambda_3 = \frac{B\phi_0}{16\pi^2 \lambda^2} \times$	- 0.1491	+ 0.2500*

Distribution du champ à l'intérieur d'une maille du réseau.

Le champ magnétique n'est pas homogène à l'intérieur d'une maille du réseau. Il est maximum au niveau du coeur de chaque ligne, et minimum au centre du triangle (ou du carré). Par symétrie, les points situés au milieu des côtés du triangle (ou du carré) sont des "cols" (figure 23).

Il est utile, pour interpréter une largeur de raie inhomogène de résonance nucléaire dans un supraconducteur de seconde espèce, de connaître la distribution $p(h)$ du champ à l'intérieur d'une maille. Soit $h(x,y)$ la fonction donnant en coordonnées rectangulaires la valeur du champ dans la maille. La

* Ce résultat vient d'être confirmé par un calcul analytique de Fetter (25)

La distribution $p(h)$ est définie par

$$p(h) = \int_{\text{maille}} dx dy \delta[h - h(x,y)] \quad (\text{III}, 22)$$

La fonction $h(x,y)$ est définie par une somme proportionnelle à III, 3, et l'évaluation de $p(h)$ pour toutes les valeurs atteintes par h ne peut être faite que numériquement. On peut cependant calculer explicitement $p(h)$ au voisinage des trois points remarquables que nous avons indiqués. Nous nous bornons ici au cas du réseau triangulaire.

a) Voisinage du minimum m . On peut développer le champ au voisinage de ce minimum

$$h = h_m + \frac{1}{2!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 h + \frac{1}{3!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 h + \frac{1}{4!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^4 h + \dots$$

Le champ autour de m a les symétries du réseau, c'est-à-dire qu'il faut garder seulement les termes invariants par les opérations de symétrie du triangle équilatéral. A chaque ordre, ces combinaisons sont :

deuxième ordre	$x^2 + y^2$
troisième ordre	$y^3 - 3x^2y$
quatrième ordre	$(x^2 + y^2)^2$

$$h = h_m + \alpha(x^2 + y^2) + \alpha'(y^3 - 3x^2y) + \beta(x^2 + y^2)^2 + \dots$$

D'autre part, h vérifie l'équation de London $h - \lambda^2 \Delta h = 0$ (en tout point autre que M). Ceci impose

$$\alpha = \frac{h_0}{4\lambda^2} \quad \alpha' = 0 \quad \beta = \frac{h_0}{64\lambda^4} \quad (\text{III}, 23)$$

Le calcul de $p(h)$ peut alors se faire soit directement d'après l'équation (III, 22) soit par un argument géométrique, du fait que h n'est, à l'ordre considéré, fonction que de $r^2 = x^2 + y^2$. On trouve

$$p(h) = 2 \pi r \frac{dr}{dh} \sim \frac{\pi}{\alpha^2} \left[1 + \frac{2\beta}{\alpha^2} (h - h_m) \right]$$

Compte tenu des valeurs (III, 23), on obtient :

$$p(h) = \frac{4\pi \lambda^2}{h_m} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{h - h_m}{h_m} \right]$$

b) Voisinage du col C. Le calcul direct de $p(h)$ lorsque le développement de h est de la forme $h = h_c + \alpha_1 x^2 - \beta_1 y^2 + \dots$ (α_1 et β_1 de même signe) montre que $p(h)$ diverge logarithmiquement par rapport à $|h - h_c|$

c) Voisinage du maximum M. On peut faire le calcul exact de $p(h)$ au point M en utilisant les équations de Ginsburg-Landau pour le centre du tourbillon. Cependant, pour les valeurs élevées de κ , ce calcul exact ne concerne qu'une très petite partie de la surface de la maille (d'ordre $(\xi/d)^2$). On peut admettre que la contribution de cette petite fraction du volume total n'est pas décelable expérimentalement et se contenter d'un calcul approximatif utilisant la forme en $\log \lambda/r$ du champ au voisinage du centre d'une ligne. On trouve alors

$$p(h) \sim \frac{4\pi^2 \lambda^4}{\phi_0} \exp - \frac{4\pi \lambda^2 h}{\phi_0}$$

Pour tracer la courbe $p(h)$, nous avons calculé numériquement les champs h_m et h_c pour différentes valeurs du rapport d/λ . Nous donnons ici le résultat du calcul pour $d/\lambda = 1/2$ (figure 24).

Nous voyons que même pour une valeur assez faible de la densité de lignes, l'écart entre h_m et h_c est extrêmement faible (de l'ordre de 0,65 % du champ moyen). Cet écart diminue lorsque la densité de lignes augmente. Il est donc probable qu'on ne pourra pas l'observer expérimentalement.

Chapitre IV

Pénétration anormale du champ magnétique dans un supraconducteur de première espèce.

Dans les supraconducteurs de seconde espèce que nous avons vus dans les trois premiers chapitres, la pénétration du champ magnétique se fait en volume et correspond à une phase unique thermodynamiquement stable. La pénétration dans un supraconducteur de première espèce est un phénomène superficiel qui n'intéresse qu'une pellicule d'épaisseur λ . Le calcul de $\lambda(H, \kappa)$ a été fait par Ginsburg et Landau ⁽²⁶⁾ lorsque le supraconducteur est au contact d'un isolant.

Dans le même domaine de validité, nous étudions ici le cas où le supraconducteur est en bon contact électrique avec un métal non supraconducteur. Nous adoptons comme condition aux limites pour le paramètre d'ordre $\psi(r)$ la loi simple

$$\left(\nabla - \frac{2ieA}{c} \right)_N \psi = \frac{1}{b} \psi$$

Le paramètre b a la dimension d'une longueur ; on l'appelle longueur d'extrapolation (de Gennes ⁽²⁷⁾). En effet, dans la jauge où ψ est réel, cette condition s'écrit $-1/\psi \nabla_N \psi = 1/b$. On voit sur la figure 25 quelle quantité géométrique représente b .

1°) Lorsque le supraconducteur est au contact du vide ou d'un isolant C Caroli ⁽²⁷⁾ a démontré que la longueur b est très grande, d'ordre ξ^2/a , où a est une distance interatomique et qu'il est par conséquent tout à fait justifié dans ce cas d'appliquer la condition de nullité pour le gradient normal à la surface. On sait (Ginsburg et Landau) que pour les valeurs faibles de κ , cette condition entraîne que la pénétration du champ magnétique se fait sur une profondeur $\lambda_T(H)$ qui varie très peu entre 0 et H_c , et qu'on peut à une très bonne approximation considérer comme constante et égale à la valeur en champ nul.

2°) Lorsque la surface du supraconducteur est une surface de contact avec un métal normal (c'est-à-dire un métal qui, à la température où se fait l'expérience, serait normal s'il était isolé), il n'y a plus aucune raison de

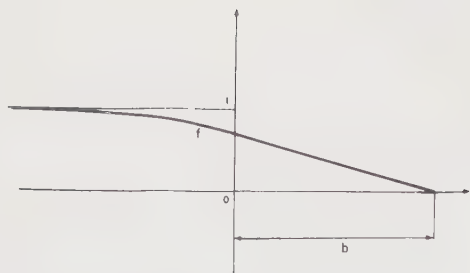
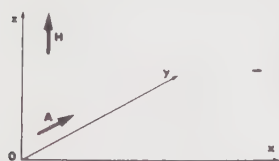


Fig. 25. - Définition de la longueur d'extrapolation



- Fig. 26 -

Fig. 27. - Structure d'une paroi pour

$$\kappa = 1/\sqrt{2}$$

f , paramètre d'ordre
 h , champ

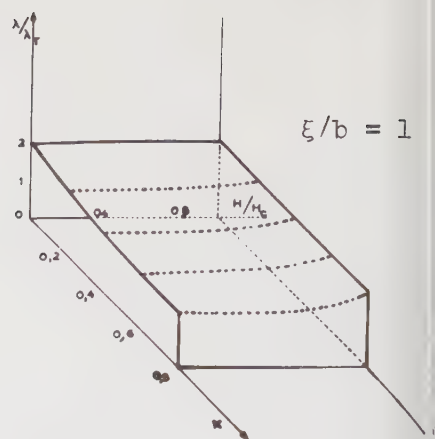
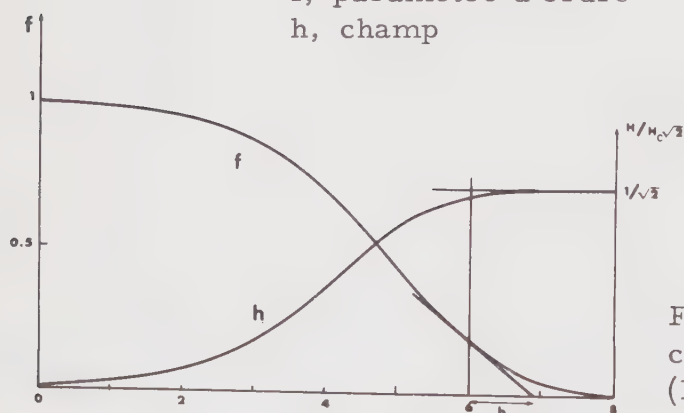


Fig. 28. - λ effectif en fonction de h et de

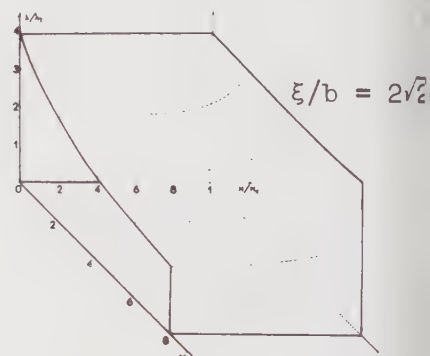


Fig. 30. - Points expérimentaux et courbe théorique de λ_{eff} en fonction de h et de ξ/b (Pb-Cu, $\kappa = 0,55$, $T = 1,3^\circ \text{ K}$)

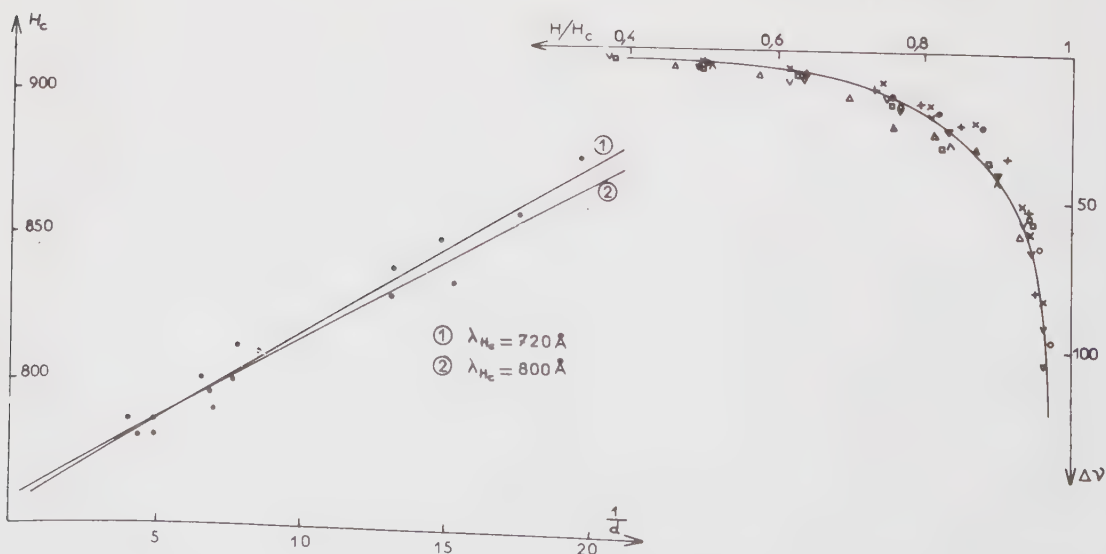


Fig. 29. - Variation linéaire de H_c en fonction de $1/d$

supposer la longueur b infinie. L'existence d'une valeur finie de b entraîne (voir figure 25) que le paramètre d'ordre a une valeur plus faible à la surface que loin de celle-ci s'il est assez épais, de sorte que la barrière opposée au champ magnétique est plus faible que dans le cas où b est infini. Le paramètre d'ordre reprend sa valeur d'équilibre thermodynamique sur une longueur au moins égale à ξ_T ce qui fait que pour les faibles valeurs de κ , nous prévoyons une pénétration plus profonde du champ magnétique, d'autant plus profonde que κ est plus faible.

Nous nous proposons ici de calculer cette épaisseur de pénétration effective λ_{eff} en fonction des paramètres qui définissent les conditions du problème, c'est-à-dire κ , le champ magnétique extérieur et la longueur d'extrapolation. Les hypothèses que nous faisons au début de ce calcul sont les suivantes.

1°) Nous supposons que les équations de Ginsburg-Landau s'appliquent, c'est-à-dire que nous sommes au voisinage de la température de transition.

2°) Nous négligeons tous les effets qui peuvent se produire du côté du métal normal, c'est-à-dire que nous considérons que celui-ci n'oppose aucun écran à la pénétration du champ magnétique. Ceci revient à supposer que les courants d'écran qui circulent dans le métal normal sont négligeables et en particulier qu'il n'y a pas de "champ de barrière" (de Gennes et Hurault⁽²⁸⁾).

3°) Nous supposons b indépendant du champ H . Cette hypothèse est simpliste mais commode (voir réf⁽¹⁷⁾ et Hurault⁽²⁹⁾ pour une discussion plus complète). Nous prenons la géométrie d'un supraconducteur homogène occupant le demi espace $z < 0$, tout ce qui se passe dans le demi espace $z > 0$ n'intervenant que par l'existence d'une longueur d'extrapolation que nous considérons comme donnée.

Dans les unités réduites habituelles (voir appendice I) et dans la jauge où ψ est une fonction réelle, les équations de Ginsburg et Landau s'écrivent

$$\frac{1}{K^2} \frac{d^2 f}{dz^2} = f(-1 + A^2 + f^2)$$

(IV, 1)

$$\frac{d^2 A}{dz^2} = f^2 A$$

f est le paramètre d'ordre réduit réel et A le potentiel vecteur. Le choix d'axes est celui de la figure 26. Le champ magnétique est dirigé selon Oy et la seule composante non nulle du potentiel vecteur est dirigée suivant Ox et ne dépend que de z - (z est la seule variable d'espace du problème). Les conditions aux limites que nous nous imposons sont les suivantes.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(-\infty) &= 1 & \text{b) } \frac{1}{f} \frac{df}{dz} \Big|_{z=0} &= -\frac{\lambda_T}{b} = -\mu \\ \text{c) } -\frac{dA}{dz} &= H & \text{d) } A(-\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV, 2})$$

Ces conditions traduisent évidemment le fait que le supraconducteur n'est perturbé ni par la condition d'extrapolation ni par le champ magnétique lorsqu'on est assez loin de la surface. Le champ magnétique vaut en chaque point $H = \text{rot } A$ donc

$$A(z) = - \int_{-\infty}^z H(z) dz \quad (\text{IV, 3})$$

On définit l'épaisseur de pénétration effective par

$$\lambda_{\text{eff}} = \frac{1}{H(0)} \int_0^{\infty} H(z) dz = -\frac{A(0)}{H(0)} \quad (\text{IV, 4})$$

Dans le cas général, il n'existe pas de solution analytique de ce problème. Nous allons examiner une série de cas limites où l'on peut obtenir cependant une solution analytique partielle.

a) $\kappa = 1/\sqrt{2}$. Harden et Apt⁽⁶⁾ et indépendamment Sarma⁽¹⁰⁾ ont proposé pour ce cas une classe de solutions des équations^(IV, 1) définie par

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dz} = A/\sqrt{2} \quad (\text{IV, 5})$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - f^2)$$

Il reste encore une étape d'intégration à franchir pour avoir la solution en $f(z)$ et $A(z)$ satisfaisant aux conditions requises, mais on peut tirer quelques renseignements concernant notre problème. Supposons que nous

connaissions la solution de "paroi" des équations (IV, 1) c'est-à-dire la solution satisfaisant aux conditions a) et d) de (IV, 2) et aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} f(+\infty) = 0 \\ H(+\infty) = H_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Cette solution est représentée sur la figure 27. Pour toute valeur de z , il existe un ensemble de valeurs des grandeurs du problème, $f(z)$, $A(z)$, $H(z)$, $b(z) = -f'(z)/f(z)$.

Nous pouvons imaginer que le point quelconque $z = z_0$ que nous venons de considérer représente la surface du supraconducteur : la solution à gauche de cette limite est alors la solution du problème que nous nous posons, pour les conditions de surface $b = b(z_0)$ et $H_{\text{ext}} = H(z_0)$.

On a immédiatement d'après (IV, 4) et (IV, 5)

$$\frac{1}{b} = - \frac{1}{f(z_0)} \left(\frac{df}{dz} \right)_{z=z_0} = - \frac{A(z_0)}{\sqrt{2}} = \frac{H(z_0) \lambda_{\text{eff}}(H_{z_0}, b_{z_0})}{\sqrt{2}} \quad (\text{IV, 6})$$

$$\text{soit} \quad \lambda_{\text{eff}}(H(z_0), b(z_0)) = \frac{\sqrt{2}}{b(z_0) H(z_0)} \quad (\text{IV, 7})$$

On sait que $H_{z_0} < H_c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et que λ_{eff} , par analogie avec le cas traité par Ginsburg et Landau, est une fonction croissante de H . D'où les inégalités :

$$\lambda_{\text{eff}}(H_c, b) \geq \lambda_{\text{eff}}(H(z_0), b) \geq \frac{\sqrt{2}}{b H_c} = \frac{2}{b} \quad (\text{IV, 8})$$

Compte tenu de l'unité de longueur λ_T , ceci s'écrit

$$\frac{\lambda_{\text{eff}}(H_c, b)}{\lambda_T} \geq \frac{2\lambda_T}{b} \quad (\text{IV, 8 bis})$$

Ceci nous donne une limite inférieure de l'effet attendu et nous voyons qu'il peut être très important.

b) $H = 0$, κ quelconque. Au voisinage de la solution $H = 0$, nous pouvons supposer que le paramètre d'ordre n'est pas modifié lorsqu'on ajoute un champ très faible. Or nous connaissons la solution en champ nul qui est $f = \text{th}(Z_0 - Z/\sqrt{2} \xi_T)$. Il existe donc une relation entre Z_0 et b donnée par

$$\frac{f'}{f} = -\frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{2} \xi_T} \left(1 - \text{th}^2 \frac{Z_0}{\xi_T \sqrt{2}} \right) / \text{th} \frac{Z_0}{\xi_T \sqrt{2}}$$

Connaissant le paramètre d'ordre, nous pouvons alors résoudre l'équation du potentiel vecteur $A'' = Af^2$ par analogie avec un cas identique et soluble de l'équation de Schrödinger (Landau et Lifshitz ⁽³⁰⁾). On trouve alors pour $A(z)$ la solution suivante

$$A = \frac{1}{\text{ch}^{1/m} \theta} F \left(-\frac{S}{2} + \frac{1}{2m}, \frac{1}{2} + \frac{S}{2} + \frac{1}{2m} \mid + \frac{1}{m} \mid -\frac{1}{\text{ch}^2 \theta} \right) \quad (\text{IV}, 6)$$

Dans cette expression, on a $\theta = \frac{Z_0 - Z}{\sqrt{2} \xi_T}$, $S = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1 + 4/m^2})$, $m = \kappa/\sqrt{2}$

et F est une fonction hypergéométrique. Connaissant $A(z)$, on peut en déduire $\lambda_{\text{eff}} = A(0)/A'(0)$. Dans le cas général, c'est une expression assez compliquée dont seules les valeurs pour certaines valeurs limites des paramètres sont utilisables. En particulier, lorsque b/ξ_T tend vers 0, on trouve

$$\frac{\lambda_{\text{eff}}(H = 0, b = 0)}{\lambda_T} = \frac{1}{\kappa\sqrt{2}} \frac{\Gamma(-S/2 + 1/\kappa\sqrt{2}) \Gamma(1/2 + S/2 + 1/\kappa\sqrt{2})}{\Gamma(1/2 - S/2 + 1/\kappa\sqrt{2}) \Gamma(1 + S/2 + 1/\kappa\sqrt{2})} \quad (\text{IV}, 7)$$

Pour une valeur donnée de κ , cette expression est facile à calculer. (Pour $\kappa = 1/\sqrt{2}$, on trouve $\lambda(0,0)/\lambda_T \sim 2.3$)

Dans la limite où κ tend vers zéro, on peut obtenir un résultat plus maniable en remarquant que les variations de A prennent place sur une distance très courte devant ξ_T , de sorte qu'on peut assimiler f à sa tangente

et écrire

$$f = f_0 \left(1 + \frac{f'_0}{f_0} z \right) = f_0 (1 - b z).$$

En reportant ce développement dans l'équation du potentiel vecteur, on trouve une forme d'équation que l'on sait intégrer à l'aide des fonctions d'Airy. En utilisant le développement asymptotique de ces fonctions, on trouve

$$\frac{\lambda_{\text{eff}}(b, H = 0, \kappa \rightarrow 0)}{\lambda_T} = \frac{1}{\frac{\kappa}{2} \times \frac{\xi}{b} + f_0} \quad (\text{IV, 8})$$

c) $\kappa = 0$. Pour κ rigoureusement nul, le résultat précédent est valable quel que soit H puisque la longueur sur laquelle s'étend la perturbation magnétique est nulle par rapport à ξ_T . On en tire que

$$\left. \frac{\lambda_{\text{eff}}(b, H)}{\lambda_T} \right]_{\kappa=0}$$

est indépendant de H et vaut $\frac{1}{f_0}$

Pour construire la solution au voisinage de $\kappa = 0$ nous pouvons utiliser une méthode de perturbation.

$$\text{On trouve } \frac{\lambda(H=0)}{\lambda(H=H_c)} = 1 - \frac{\kappa}{4f_0^3 (\eta + \sqrt{2} f_0)} \quad (\text{IV, 9})$$

Pour les valeurs très élevées de ξ/b , l'équation transcendante qui lie η et f_0 se simplifie et on trouve

$$\frac{\lambda(H=0)}{\lambda(H=H_c)} \sim 1 - \frac{\kappa \eta^2}{4\sqrt{2}} \quad (\text{IV, 10})$$

Solution numérique. Pour résoudre le cas général, nous avons eu recours au calcul numérique sur ordinateur. Nous avons reporté les résultats obtenus sur la figure 28, pour les valeurs 1 et $2\sqrt{2}$ du paramètre $\eta = \xi_T/b$. On voit que pour

les valeurs de κ supérieures à 0,1, presque toute la variation de λ_{eff} s'effectue entre $0,8 < H/H_c < 1$. C'est donc ce domaine qui devra être exploré si la méthode expérimentale ne donne que la variation de λ . Cependant, pour $\eta = 2\sqrt{2}$ par exemple, on voit que pour des valeurs de κ de l'ordre de 0,5, on trouve, même en champ nul, une valeur de λ_{eff}/T de l'ordre de 2. Il est donc très intéressant d'avoir une méthode de détermination directe de $\lambda_{\text{eff}}/\lambda_T$.

Vérification expérimentale. Pour vérifier ces résultats, une série de mesures ont été faites par G. Deutscher et J.P. Burger à Orsay⁽³¹⁾. Le bilame utilisé a comme métal normal du cuivre et comme métal supraconducteur du plomb. Les deux métaux sont évaporés successivement sur un tube cylindrique, le plomb étant évaporé le premier. Bien que notre calcul ait été fait pour des milieux semi-infinis, nous allons voir que nous pouvons l'appliquer à des films dans ce cas particulier. Dans notre problème, le métal normal n'intervient que pour imposer une condition aux limites, c'est-à-dire une longueur d'extrapolation. Celle-ci dépend évidemment de la nature et de l'épaisseur de la couche de métal normal mais, si la couche est assez épaisse, on peut considérer que toutes les couches évaporées dans les mêmes conditions imposent le même b , car elles ont sensiblement la même épaisseur et le même libre parcours moyen. Les expériences d'Orsay ont été faites sur une série d'échantillons ayant tous la même couche de métal normal, c'est-à-dire imposant la même condition aux limites. Le rôle de l'épaisseur de plomb est plus compliqué : en effet, on constate que les champs critiques H_c et H_{c3} des bilames dont les épaisseurs de plomb d s'étendent de 5.000 à 20.000 Å varient linéairement en fonction de $1/d$. Nous reviendrons ailleurs

sur la variation de H_{c3} . Pour calculer la variation de H_c avec d , nous allons faire un calcul identique à celui de Ginsburg et Landau⁽²⁶⁾ pour un film. Le champ de transition H_{cT} du bilame obéit à l'équation thermodynamique

$$-\frac{H_{cT}^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{H_{cT}} B(H) dH = -\frac{H_c^2}{8\pi} \quad (\text{IV, 11})$$

B , valeur moyenne du champ dans le supraconducteur, vaut

$$B = \frac{1}{d} \int_{\text{épaisseur}} H(0) dx = \frac{\lambda_{\text{eff}} + \lambda_T}{d} H_{\text{ext}} \quad (\text{IV, 12})$$

$\frac{\lambda_{\text{eff}}}{d}$ correspond à la face cuivrée du plomb et λ_T/d à la face libre.

On arrive ainsi à la relation thermodynamique

$$H_c^2 = H_{cT}^2 \left(1 - \frac{\lambda_T}{d}\right) - \frac{2}{d} \int_0^{H_{cT}} (H) H dH \quad (\text{IV}, 13)$$

qu'on peut aussi écrire

$$H_{cT} = H_c \left(1 + \frac{\alpha}{d}\right)$$

avec

$$\alpha = \lambda_T \left[\frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{\lambda(H, b)}{\lambda_T} \frac{H}{H_c} d\left(\frac{H}{H_c}\right) \right] \quad (\text{IV}, 14)$$

L'intégrale qui figure dans l'expression de α est un nombre qui ne dépend que de κ et de b , et qu'on peut calculer à l'aide des résultats numériques que nous avons obtenus. Ce calcul n'est valable que si les perturbations provoquées sur chaque face du film de plomb par le champ magnétique sont découplées l'une de l'autre, autrement dit s'il existe au centre du film une région où le paramètre d'ordre et le champ magnétique ont les valeurs qu'ils auraient dans un échantillon semi-infini loin de la surface. Or, dans les expériences de Deutscher et Burger, l'épaisseur de la couche de Plomb est toujours supérieure à 5.000 Å, donc cette condition est satisfaite car ξ_T est environ 800 Å. Il faut remarquer que les effets d'épaisseur sont de deux natures différentes :

a) le déplacement du champ critique H_{cr} (variant linéairement avec $1/d$) est encore décelable pour des épaisseurs grandes par rapport à λ_T et ξ_T .

b) les distorsions du paramètre d'ordre, et qui, décroissant exponentiellement avec d , ne sont sensibles que lorsque l'épaisseur est comparable aux longueurs caractéristiques. Dans les expériences que nous décrivons ici, seules apparaissent les modifications d'origine thermodynamique et le modèle semi infini que nous avons calculé s'applique.

L'interprétation des résultats a été faite en deux étapes. La variation

linéaire expérimentale (figure 29) de H_{CT} en fonction de $1/d$ permet de déterminer une valeur du coefficient α et les courbes $\lambda(H,b)$ permettent de calculer $\alpha(b)$ d'après l'équation IV.14. Ceci nous permet de choisir la valeur optimale b_0 de b . Lorsqu'on compare la courbe $\lambda(H,b_0)$ en fonction de H avec les valeurs mesurées, on voit (figure 30) que cet accord est excellent dans tout le domaine de champ exploré, c'est-à-dire de $0.4 H_c$ à $0.96 H_c$.

Il faut cependant faire des réserves sur cet accord, qui n'est peut-être que fortuit. En effet :

a) Il résulte de l'application des équations de Ginsburg-Landau à une situation où la température réduite est environ 0.2, c'est-à-dire très au delà de leur limite de validité,

b) Nous n'avons aucune raison théorique de supposer que la longueur d'extrapolation b est indépendante du champ extérieur. Comme il n'existe pas actuellement d'autre méthode de détermination de cette longueur, il ne nous est pas possible de contrôler notre évaluation ni d'en estimer la précision. Nous devons donc attendre d'autres séries de mesures sur d'autres bilames pour établir la validité de notre modèle.

CONCLUSIONS

1°) Lorsque la surface d'un supraconducteur est recouverte par un métal normal, l'abaissement superficiel du paramètre d'ordre augmente l'épaisseur de pénétration et la rend plus sensible au champ magnétique. Cet effet est bien vérifié dans le cas de bilames Plomb-Cuivre à basse température mais cet accord est peut-être accidentel ; il est souhaitable que de nouvelles expériences soient faites d'une part dans un domaine de température où les équations de Ginsburg-Landau soient valables, d'autre part en utilisant des alliages ou des matériaux "sales" à libre parcours moyen court pour qu'on puisse disposer d'autres moyens de déterminer la longueur d'extrapolation.

2°) Nous n'avons à l'heure actuelle aucun moyen d'étudier directement la structure d'une ligne de tourbillon. Les calculs que nous avons faits donnent de la ligne une structure détaillée et montrent qu'une ligne isolée à un seul quantum de flux est plus stable qu'une ligne à plusieurs quanta, quelle que soit la valeur du paramètre κ . Ce résultat semble bien confirmé par les mesures de H_{c1} et les courbes d'aimantation : la différence entre les deux courbes est extrêmement faible et certainement très inférieure aux imprécisions dues à l'irréversibilité. Par contre, la diffraction des neutrons semble prouver, au moins pour les champs voisins de H_{c2} que le réseau est bien triangulaire. Ces résultats expérimentaux n'ont été obtenus que sur des supraconducteurs à faible κ , pour lesquels notre calcul n'est certainement pas valable ; dans les supraconducteurs à κ élevé, l'effet risque d'être peu observable pour deux raisons : d'une part, la variation spatiale du champ magnétique est d'autant moins marquée que κ est plus élevé, donc la section efficace devient beaucoup faible. Or les mesures actuelles, faites avec un réacteur à très haut flux, sont déjà à la limite de sensibilité décelable. D'autre part, il est à l'heure actuelle très difficile d'obtenir des matériaux de κ élevé présentant une très faible densité de défauts de structure. Ces défauts s'opposent donc toujours à l'établissement d'un état d'équilibre. Il serait également très intéressant de tenter l'observation des lignes de tourbillon par microscopie électronique, bien que cette observation ne puisse se faire que sur des couches minces. On sait que dans ce cas les tourbillons ont une structure très différente de celle

qu'ils ont dans un échantillon massif (Pearl 15), et que notamment leurs interactions sont à beaucoup plus longue portée, ce qui diminue la possibilité qu'ils ont de s'organiser en réseaux. Les calculs d'énergie de réseau que nous avons faits sont valables dans une approximation de London, ce qui correspond aux cas où les coeurs des lignes ont une dimension négligeable. Bien que cela représente un calcul assez lourd, on pourrait envisager d'étendre les évaluations d'énergies de réseaux au cas où κ est de l'ordre de 1, qui est la situation expérimentale la plus favorable. Il faudrait alors résoudre non plus l'équation de London d'un réseau de tourbillons, mais les équations de Ginsburg-Landau, avec le terme non linéaire. Ce travail a été en partie fait par Marcus (32). On pourrait aussi calculer de façon plus précise la barrière de surface (Bean et Livingstone 33) dont les expériences de Rocher (34) semblent montrer l'importance dans le tracé des courbes d'aimantation.

3°) Le modèle que nous proposons pour les lignes de tourbillon courbées est lui aussi un modèle très simplifié qui ne peut servir qu'à décrire qualitativement et dans des situations idéales les interactions des lignes entre elles et avec les surfaces. La seule justification que nous pouvons en donner est qu'elle est équivalente à la théorie élastique des dislocations et on sait que cette théorie, tant qu'on ne s'intéresse pas à la région de mauvais cristal, rend assez bien compte des déformations élastiques des cristaux. Les résultats que nous avons obtenus peuvent donc servir à décrire un supraconducteur "dur" de κ élevé dans le domaine où l'induction n'est pas trop grande. L'étape suivante de cette étude consisterait à décrire les processus d'ancrage des lignes sur les défauts du cristal : il faudrait pour cela connaître quels sont les défauts qui sont les plus efficaces, c'est-à-dire qu'il faudrait accompagner les tracés de courbes d'aimantation d'étude micrographiques précises donnant entre autre la distance moyenne entre points d'ancrage. On pourrait alors calculer l'énergie d'activation nécessaire pour qu'une ligne saute d'un point d'ancrage au suivant, et obtenir des renseignements sur la dynamique de la pénétration du flux.

Nous avons discuté les limitations de notre modèle de nucléation en surface pour la phase de Shubnikov. Nous pensons cependant qu'au voisinage du champ de nucléation, ce modèle peut s'appliquer, à condition que la surface soit parfaite ; une étude expérimentale de la nucléation en fonction de l'état de surface pourrait sans doute montrer s'il est nécessaire d'améliorer ce modèle, en particulier en calculant la façon dont une ligne se raccorde à la surface du supraconducteur.

Appendice I

EQUATIONS DE GINSBURG-LANDAU.

En champ magnétique nul, la transition supraconductrice est du second ordre. La théorie générale de ces transitions dues à Landau s'applique donc et l'énergie libre du supraconducteur peut se développer en fonction d'un paramètre d'ordre ψ au voisinage de la transition

$$F_S = F_N + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 \quad (\text{AI, 1})$$

Cette équation décrit une phase homogène, et sans champ magnétique. Ginsburg et Landau ont supposé qu'en présence de variations spatiales de ce paramètre d'ordre et sous champ magnétique, ce développement restait valable à condition de rajouter l'énergie magnétique, un terme rendant compte de l'énergie de variation du paramètre d'ordre, et un terme assurant l'invariance de jauge de l'énergie libre, ce développement complet s'écrit :

$$F_S = F + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| \left(-i\hbar \nabla - \frac{e^* \mathbf{A}}{c} \right) \psi \right|^2 + \frac{H^2}{8\pi} \quad (\text{AI, 2})$$

e^* représente une charge qui n'a aucune raison d'être la charge de l'électron. Ce développement a été complètement justifié lorsque Gor'kov (35) a établi la forme (AI, 2) de l'énergie libre à partir de la théorie microscopique ; il a montré alors que $\psi(r)$ représentait en fait l'amplitude de probabilité d'une paire de Cooper, et que la charge à choisir était non pas e mais $2e$. Si, compte tenu de cette correction, nous écrivons que l'énergie libre est stationnaire par rapport à des variations indépendantes de ψ et de $\vec{A}$, nous obtenons les deux équations de Landau et Ginsburg.

$$\alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi + \frac{1}{2m} \left(i\hbar \nabla - \frac{2e\mathbf{A}}{c} \right)^2 \psi = 0 \quad (\text{AI, 3})$$

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \quad \vec{\text{rot}} \vec{H} = \frac{e}{m} \left[\psi^* \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e\mathbf{A}}{c} \right) \psi + \text{c.c.} \right] \quad (\text{AI, 4})$$

Les équations de Landau-Ginsburg dépendent de deux paramètres, α et β dont la théorie générale de Landau nous dit

1°) qu' α est proportionnel à $T_c - T$,

2°) que β est strictement positif. Nous allons passer en revue quelques cas simples qui vont mettre en évidence le sens de ces coefficients.

a) Supraconducteur homogène infini. Pour $T_c - T > 0$, c'est-à-dire pour $\alpha < 0$, l'équation (AI, 3) a pour solution $|\psi_0|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$, ce qui nous montre que $|\psi_0|^2$ tend vers 0 comme $T_c - T$.

b) Supraconducteur en champ faible. Si nous admettons qu'au premier ordre le paramètre d'ordre n'est pas modifié par le champ, l'équation du courant s'écrit

$$\mathbf{j} = \frac{2e}{m} |\psi_0|^2 (\nabla \phi - \frac{2e\mathbf{A}}{c}) \quad (\phi \text{ est la phase du paramètre d'ordre})$$

$$\psi_0(\mathbf{r}) = |\psi_0(\mathbf{r})| e^{i\phi}$$

Le rotationnel de cette équation $\text{rot } \mathbf{j} = -\frac{4e^2 |\psi_0|^2}{mc} \vec{H}$ est l'équation phénoménologique proposée en 1935 par London (36) pour expliquer l'effet Meissner. Le coefficient de London faisait intervenir la densité d'électrons supraconducteurs ; les deux équations sont équivalentes si l'on pose $n_S = 4|\psi_0|^2$. En éliminant le courant entre l'équation de London et l'équation de Maxwell $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$, on obtient pour $\mathbf{H}$ l'équation

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = -\frac{16 e^2 |\psi_0|^2 \pi}{mc^2} \mathbf{H}$$

qui montre que la longueur caractéristique donnant l'échelle des variations du champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur appelée épaisseur de pénétration vaut

$$\lambda^2(T) = \frac{mc^2}{4\pi |\psi_0|^2 (2e)^2} = -\frac{mc^2 \beta}{16\pi \alpha}$$

Nous voyons que $\lambda(T)$ diverge près de T_c comme $(T_c - T)^{-1/2}$.

Il est nécessaire de donner une définition de λ valable même lorsqu'une loi exponentielle ne sort pas directement du résultat. On prend alors comme équation de définition

$$\lambda = \frac{\int_0^{\infty} H(x) dx}{H(x=0)}$$

c) Supraconducteur en champ nul près de T_c . La première équation s'écrit

$$\alpha \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = 0$$

en négligeant les termes en $\psi |\psi|^2$ qui sont très petits devant les termes conservés. La solution exponentiellement décroissante de cette équation fait intervenir une nouvelle longueur, la longueur de cohérence $\xi(T) = \hbar / \sqrt{2m|\alpha|}$ qui diverge près de T_c de la même façon que λ . Le rapport de ces deux quantités $\kappa = \lambda(T)/\xi(T)$ sensiblement indépendant de la température est le paramètre de Ginsburg-Landau. Le sens physique de la longueur $\xi(T)$ découle immédiatement du résultat précédent : c'est l'échelle de variation du paramètre d'ordre en champ nul.

Lorsque κ est très grand ($\lambda(T) \gg \xi(T)$), les variations du potentiel vecteur et du courant ne sont pratiquement plus couplées à celle du paramètre d'ordre et l'équation de London s'applique presque partout dans l'espace, sauf dans les petits domaines où le paramètre d'ordre varie.

Les équations de Ginsburg-Landau constituent un outil extrêmement puissant, malgré la présence d'un terme non linéaire dans la première, pour résoudre les problèmes stationnaires où le paramètre d'ordre et le champ magnétique varient dans l'espace. Ces équations ne sont applicables qu'au voisinage de la température de transition, tant que le développement (AI, 2) de l'énergie libre reste valable. Il est très difficile de définir la limite de validité en température; qualitativement les résultats obtenus sont en accord avec l'expérience dans un très large domaine.

Dans l'article original de Ginsburg et Landau, les équations (AI, 3) et (AI, 4) sont données dans un système d'unités où leur écriture est particulièrement condensée : les trois unités fondamentales sont :

a) L'unité de longueur $\lambda = \left(-\frac{mc^2\beta}{16\pi\alpha}\right)^{1/2}$

b) L'unité de champ magnétique qui vaut $H_c\sqrt{2}$, H_c étant le champ critique pour le problème considéré.

c) L'unité d'énergie qui est le double de l'énergie de condensation et vaut $H_c^2/4\pi$.

En outre, le module du paramètre d'ordre est rapporté à la valeur ψ_0 qu'il prend en champ nul pour un supraconducteur massif à la température considérée.

Dans ce système, les équations prennent la forme

$$\begin{cases} \left(\frac{i\nabla}{\kappa} + A\right)^2 \psi = \psi - \psi|\psi|^2 \\ -\text{rot rot } A = |\psi|^2 A + \frac{i}{2\kappa} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \end{cases}$$

La relation la plus pratique pour faire le passage d'un système d'unité à l'autre est l'expression du quantum de flux.

$$\text{Unités normales} \quad \phi_0 = \frac{hc}{2e} = 2\pi \lambda \xi \sqrt{2} H_c$$

$$\text{Unités Landau-Ginsburg} \quad \phi_0 = \frac{2\pi}{\kappa}$$

Appendice II

METHODE D'EWALD. CALCUL DES COEFFICIENTS DE CISAILLEMENT.

Soit une distribution périodique de charges $\rho(\chi) = \sum_{R_i} q(\chi - R_i)$

la somme étant étendue à tous les points d'un réseau et soit $V(\chi - \chi_0)$ le "potentiel" créé par une charge unité située au point χ_0 . Le "potentiel" créé en un point par la distribution $\rho(\chi)$ s'écrit :

$$\phi(\chi) = \int \rho(\chi') V(\chi - \chi') d\chi' \quad (\text{A II, 1})$$

Appelons $u(\chi)$ le potentiel créé par la distribution élémentaire $q(\chi)$

$$u(\chi) = \int V(\chi - \chi') q(\chi') d\chi'$$

On peut écrire $\phi(\chi)$ sous la forme d'une série de Fourier à cause de la périodicité de la distribution $\rho(\chi)$

$$\phi(\chi) = \sum_{K_j} \phi(K_j) e^{i K_j \cdot \chi} \quad (\text{A II, 2})$$

La sommation s'étend à l'ensemble des vecteurs du réseau réciproque.

Etant donné la forme de A II, 1, les coefficients $\phi(K_i)$ s'écrivent :

$\phi(K_i) = \rho(K_i) V(K_i)$ où $\rho(K_i)$ est le coefficient de Fourier de $\rho(\chi)$ ou, ce qui revient au même, la transformée de Fourier de $q(\chi)$, et $V(K_i)$ est la transformée de Fourier de $V(\chi)$.

Lorsqu'on s'intéresse à $\phi(0)$, la convergence de la série A II, 2 est conditionnée seulement par la décroissance de $\phi(K_i)$. Si les charges sont des charges ponctuelles situées aux noeuds du réseau, les coefficients $\rho(K_i)$ sont tous égaux à 1, et seule la décroissance de $V(K_i)$ entraîne la convergence.

Lorsque celle-ci est très lente, on utilise la méthode d'Ewald qui remplace la distribution de charges ponctuelles par une distribution continue où chaque charge est répartie selon une gaussienne centrée au noeud du réseau correspondant. Les coefficients $\rho(K_i)$ décroissent alors eux aussi selon une loi gaussienne lorsque (K_i) croît et la convergence de A II, 2 devient très rapide. Cependant, la solution trouvée n'est plus celle du problème donné puisque la distribution n'est pas $\rho(r)$ mais une nouvelle distribution $\rho_1(r)$. Nous devons donc rajouter au résultat obtenu le potentiel créé par la distribution périodique $\rho_2(r) = \rho(r) - \rho_1(r)$ dont la maille élémentaire $q_2(\chi)$ est égale à la somme d'une charge ponctuelle et d'une distribution gaussienne de même forme que celle de $q_1(r)$, mais de signe contraire. Les distributions $q_1(r)$ et $q_2(r)$ valent donc :

$$\left. \begin{aligned} q_1(r) &= \frac{1}{2\pi \rho^2} e^{-r^2/2\rho^2} \\ q_2(r) &= \delta(r) - \frac{1}{2\pi \rho^2} e^{-r^2/2\rho^2} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} & \text{(A II, 3)} \\ & \rho \text{ est un paramètre} \\ & \text{fixant la portée de} \\ & \text{la gaussienne.} \end{aligned}$$

Nous savons calculer $\phi_1(K_i) = \rho_1(K_i) V(K_i)$. En effet, la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne dans l'espace réciproque et $V(K_i)$ peut se calculer lorsqu'on connaît $V(\chi)$.

D'autre part, la distribution $q_2(r)$, dont la charge totale est nulle, crée un potentiel qui décroît beaucoup plus vite que celui de la distribution initiale $\rho(r)$. Si l'on sait calculer cette fonction

$$u_2(\chi) = \int V(\chi - \chi') q_2(r') dr'$$

la fonction $\phi(\chi)$ cherchée s'écrit simplement :

$$\phi(\chi) = \sum_{K_i} \phi_1(K_i) e^{i K_i \cdot \chi} + \sum_{R_j} u_2(r - R_j) \quad \text{(A II, 4)}$$

On choisit alors le paramètre ρ de façon que les deux sommes convergent le plus

rapidement possible. On démontre que le résultat ne dépend pas de ρ .

Dans le cas du coefficient de cisaillement, le "potentiel" $u(r)$ est une fonction des variables x et y faisant intervenir les dérivées partielles de la fonction

$$V(r) = \frac{\phi_0^2}{8\pi^2 \lambda^2} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right)$$

Nous calculons d'abord les fonctions $\phi_1(k)$ et $u_2(r)$

$$\rho_1(K_i) = \int q_1(r) e^{iK_i r} d^2 r = e^{-\frac{1}{2} K_i^2 \rho^2}$$

Pour calculer $V(K_i)$, on prend la transformée de Fourier de l'équation de London,

$$h + \lambda^2 \text{rot rot } h = \phi_0 \sum_i \delta(r - R_i)$$

car $V(r)$ est proportionnel à $h(r)$.

$$V(K_0) = \frac{\phi_0^2}{4\pi} \frac{1}{1 + \lambda^2 K_i^2}$$

On a donc

$$\phi_1(K_i) = \frac{\phi_0^2}{4\pi} \frac{e^{-\frac{1}{2} K_i^2 \rho^2}}{1 + \lambda^2 K_i^2} \quad (\text{A II, 5})$$

Le calcul de $u_2(r)$ peut se faire directement. Il est plus simple d'inverser l'équation (A II, 5), ce qui donne $u_1(r)$ ou plus exactement du_1/dr (ce calcul est faisable seulement dans la limite $\lambda^2 K^2 \gg 1$, ce qui correspond bien à $d \ll \lambda$). Sachant que $u_2(r) = u(r) - u_1(r)$, on trouve finalement

$$r \frac{du_2}{dr} = - \frac{\phi_0^2}{8\pi^2 \lambda^2} e^{-r^2/2\rho^2}$$

ce qui nous permet de calculer les dérivées partielles nécessaires.

L'expression à calculer s'écrit

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} n \sum_j x_{oj}^2 \frac{\partial^2 v_{oj}}{\partial y^2}$$

que nous décomposons en deux termes

$$\lambda_3^{(1)} = \frac{B^2}{8\pi} \sum_{K_i} K_{ij}^2 \frac{\partial^2}{\partial K_x^2} \frac{e^{-\frac{1}{2} K_i^2 \rho^2}}{1 + \lambda^2 K_i^2} \quad (\text{A II, 6})$$

et

$$\lambda_3^{(2)} = \frac{1}{2} n \sum_j x_{oj}^2 \frac{\partial^2 u_2(R_j)}{\partial^2 r} \quad (\text{A II, 7})$$

Compte tenu de l'expression de $u_2(r)$, les calculs de dérivées partielles sont simples et on obtient finalement

$$\begin{aligned} \lambda_3^{(1)} = & \frac{B \phi_o}{(4\pi \lambda)^2} \frac{1}{2\pi} \sum_{k_i} e^{-\frac{1}{2} k_i^2 \left(\frac{2\pi\rho}{d}\right)^2} k_{iy}^2 \left[\left(\frac{2}{k_i^4} + \left(\frac{2\pi\rho}{d}\right)^2 \frac{1}{k_i^2} \right) (k_{ix}^2 \left(\frac{2\pi\rho}{d}\right)^2 - 1) \right. \\ & \left. + \left(\frac{8}{k_i^6} + \frac{2}{k_i^4} \left(\frac{2\pi\rho}{d}\right)^2 \right) k_{ix}^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A II, 8})$$

après avoir posé $K_i = \frac{2\pi}{d} k_i$

$$\lambda_3^{(2)} = \frac{B\phi_o}{(4\pi \lambda)^2} \sum_{j \neq 0} e^{-R_j^2/2\rho^2} \frac{x_j}{R_j^2} \left(-1 + \frac{2 y_j^2}{R_j^2} + \frac{y_j^2}{\rho^2} \right) \quad (\text{A II, 9})$$

Pour effectuer les sommations, il faut exclure l'origine dans la somme directe et la valeur moyenne de la transformée de Fourier dans l'espace réciproque, mais comme elle donne une contribution nulle dans la sommation de $u_1(r)$, on peut l'inclure et par conséquent ne rien retrancher de A II,8.

Nous avons vérifié que la somme obtenue ne dépendait pas de la valeur choisie pour ρ , du moins dans un assez large domaine : en étendant la somme aux cinq premiers voisins dans l'espace direct et dans l'espace réciproque, nous obtenons un résultat rigoureusement constant (à 10^{-8} près) pour des valeurs de ρ/d allant de 0,2 à 5.

TABLEAU I

κB_{Δ}	$\kappa G_{\Delta}/B_{\Delta}$	$\kappa B_{\square}$	$\kappa G_{\square}/B_{\square}$	$\kappa (H - H_{cl})$
0,1	- 0,002293	0,09495	- 0,002279	0,001401
0,3	- 0,06841	0,2937	- 0,06796	0,04664
0,5	- 0,1980	0,4936	- 0,1970	0,1432
0,7	- 0,3564	0,6937	- 0,3547	0,2680
0,9	- 0,5291	0,8938	- 0,5270	0,4094
1,0	- 0,6187	0,9939	- 0,6164	0,4844
3,0	- 2,5453	2,9943	- 2,5414	2,2154
5,0	- 4,5280	4,9944	- 4,5236	4,0883
7,0	- 6,5203	6,9945	- 6,5156	6,0043
9,0	- 8,5159	8,9946	- 8,5111	7,9415
10,0	- 9,5143	9,9946	- 9,5095	8,9152
100,0	-99,5011	99,9947	-99,4959	98,3393
150,0	-149,5003	149,9947	-149,4950	148,2376
200,0	-199,5000	199,9949	-199,4945	198,1655

BIBLIOGRAPHIE

- 1) GORTER, C.J. et CASIMIR, H.B.G. Physica 1, 306, (1934)
- 2) MESHKOWSKY, A. et SHALNIKOV, A. JETP (USSR) 17, 851 (1947)
- 3) SHUBNIKOV, KHOTKEVICH, SHEPELEV, RIABININ JETP(USSR) 7, 221 (1937)
- 4) GINSBURG, V.L., LANDAU, L.D JETP (USSR) 20, 1064, (1950)
- 5) ABRIKOSOV A.A. JETP(USSR) 32, 1442 (1956). Traduction anglaise Soviet Phys.
JETP 5, 1174 (1957)
- 6) HARDEN J.L., ARP.V Cryogenics, 3, 105 (1963)
- 7) ONSAGER. L. Nuovo Cimento 6. Supp. 2, 249 (1949)
FEYNMAN R.P. Progress in Low Temp. Phys. I (North Holland Pub. Co. Amsterdam (1955)
- 8) GOODMAN B.B. Phys. Letters 18, 8 (1965)
- 9) CASTAING Communication privée

- 10) SAINT-JAMES. D, et SARMA. G, A paraitre
- 11) GINSBURG. V.L, PITAEVSKII, L.P, JETP(USSR) 34, 1940 (1958)
Sov. Phys. (JETP) 7, 858 (1958)
- 12) MOREAU Thèse 3ème Cycle - PARIS (1964)
- 13) MATRICON. J, Communication privée
- 14) NOZIERES. Ph, Communication privée
- 15) PEARL. J. Thèse (1965)
- 16) GOODMAN B.B. MATRICON J. Colloque sur la physique des dislocations (à paraitre)
- 17) de GENNES et le Groupe d'Orsay de Supraconductivité. Symposium on quantum fluids
(Brighton 1965)
- 18) de GENNES Superconducting metals and alloys. Benjamin Inc. 1966
- 19) LANDAU LIFSHITZ. Electrodynamics of continuous media p. 129 et suiv. Pergamon
Press (1960)
- 20) KLEINER W.H, ROTH L.M., AUTLER S.H, Phys. Rev. 133 A, 1226 (1964)
- 21) CRIBIER, FARNOUX, JACROT, MADARRAO, à paraitre dans Progress in Low Temp. Phys.
- 22) de GENNES P.G. MATRICON J. Rev. of mod. phys. 36, 45 (1964)
- 23) LANDAU, LIFSHITZ, Elasticity p.40 (Pergamon Press)
- 24) FETTER A.L, HOHENBERG P.C, PINCUS P. à paraitre
- 25) FETTER A.L. à paraitre
- 27) CAROLI C. de GENNES P.G. MATRICON J. J. Phys. Rad. 23, 707 (1962)

- 28) de GENNES P.G., HURAUULT J.P. Phys. Lett. 17, 181, (1965)
- 29) HURAUULT J.P à paraître
- 30) LANDAU, LIFSHITZ Quantum Mechanics p. 69
- 31) DEUTSCHER G., BURGER J.P. à paraître
- 32) MARCUS P. Proceedings of the meeting on type II Superconductors
(Cleveland 1964. Non publié)
- 33) BEAN C.P. LIVINGSTONE J. Phys. Rev. Letters 12, 14 (1964)
- 34) ROCHER Y.A. Communication privée
- 35) GOR'KOV L.P. JETP (USSR) 37, 1407 (1959) ; (Soviet Phys. JETP 10, 998 (1960)
- 36) LONDON F et H Proc. Roy. Soc. A 149, 71 (1935) Physica 2, 341 (1935)

